TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

AD. MEYER, OTTO GALLANDER,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

SJUNDE ÅRGÅNGEN

1923—1924

STOCKHOLM
ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1924

Sjunde årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

BENEDICKS, CARL. Enhetlig trådkonstruktion av andragradskurvorna ... 211
BÅGMAN, S. Bidrag till teorin för den allmänna andragradsekvationen med två variabler ... 129
FORSSTRÖM, GUST. Beräkning av månens massa ... 17
GALLANDER, OTTO. Anomalier vid Ohms lag och dess motsvarighet inom magnetismen ... 227
HAMMARSTEN, OLOF. En apparat för demonstration av osmotiskt tryck 43
LUNDBERG, JOHN. Rörliga modeller av trefasgenerator och -motor ... 36
MEBIUS, C. A. En generalisation av binomialteoremet ... 65
—— En exakt formel för ljusets brytning i en sfärisk yta ... 193
MEYER, AD. Kurvuppritning i andra ringen ... 138
MOLIN, KURT. Om ljusets prismatiska avböjning ... 20
—— Något om toleransberäkning ... 158
ODENKRANTS, ARVID. Det stereoskopiska seendets natur och dess nyaste användningar ... 88
PETRINI, HENRIK. Om beräkning av logaritmer ... 13
—— Två approximationsmetoder till ekvationen $x^n = a + bx$ ... 219
RAMSTEDT, EVA. Om atomernas sönderspräng ning ... 98
STARCK, G. Apparat för sträckningselasticitet ... 45
—— Nyare arbeten inom atomteorin ... 233
—— Kemiska notiser. V ... 48
STENMARK, H. Till vilken form hör en under allmän form given andragradskurva? ... 134
SÖDERBORG, BENKT. Några försök till elektricitetsläran ... 109
—— Några försök till läran om ljusets natur ... 169
SÖRENSEN, AUG. Om figurtals- och fakultetsserier ... 154
X. Några elementära diofantiska uppgifter ... 1
—— Några tetraedersatser ... 76
ZACHRISSON, EINAR. Rörliga modeller av trefasgenerator och -motor 181

II. Meddelanden, recensioner m. m.

Meddelanden.

Ett geometriskt bevis för minimideviation (SVEN RINGENSON) ... 55
Ett bevis för ptolemeiska satsen (O. JOSEPHSON) ... 56
Inköp av fysikaliska apparater (H—m) ... 57

Sid.
Newtons lag ur Kepplers lagar (S. B—n) ... 120
Anmärkning beträffande lösningen av en fysikalisk uppgift (S. B—n) 121
Beräkning av excentricitet och parameter av en konisk sektion (FRANS HANSSON) ... 184
Almanacksreform (M—r) ... 243

Bokanmälningar.

BRODÉN, BJERRUM och STRÖMGREN, De exakta naturvetenskaperna under det nittonde århundradet (M—r) ... 50
J. HERRMANN, Elektroteknik I (O. G—r) ... 53
H. SCHJELDERUP, Relativitetsteoriens verdensbillede (M—r) ... 243

Polemik.

Några ord till svar angående trefasgenerator och -motormodeller (JOHN LUNDBERG) ... 245

Prisuppgift för 1923—24 ... 64
Lösningar av densamma ... 251
Matematiska uppgifter ... 58, 123, 186, 245
Lösningar ... 59, 123, 187, 246
Frågor och svar ... 252

Några elementära diofantiska uppgifter.

Av X.

Sats 1. *Systemet*

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2 \\ x^2+4y^2&=b^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

kan icke lösas med positiva heltalsvärden på x, y, a, b.

För att bevisa detta antaga vi, att det finnes åtminstone ett sådant lösningssystem. Med »minsta lösningen» förstår jag den (ev. en av dem), för vilken (vilka) a har det minsta möjliga värdet. Denna lösning vare x_0, y_0, a_0, b_0. I denna »minsta lösning» måste *för det första* x_0 och y_0 vara rel. primtal, ty hade de faktorn $\delta > 1$ gemensam, skulle denna faktor även ingå i a_0 och b_0 och då vore

$$x_1=\frac{x_0}{\delta},\ y_1=\frac{y_0}{\delta},\ a_1=\frac{a_0}{\delta},\ b_1=\frac{b_0}{\delta}$$

tydligen en »mindre lösning». *För det andra* måste x_0 vara udda och följaktligen y_0 jämnt,[1] ty vore i stället x_0 jämnt och y_0 udda, så vore även b_0 jämnt och

$$x_1=y_0,\ y_1=\frac{x_0}{2},\ a_1=\frac{b_0}{2},\ b_1=a_0$$

vore en »mindre lösning»,

ty, då $$\frac{b_0^2}{4}=\frac{x_0^2}{4}+y_0^2$$

och $$a_0^2=x_0^2+y_0^2,$$

så är $$\frac{b_0}{2}<a_0.$$

[1] x_0, y_0 äro mätetal för kateterna i en pytagoreisk triangel. Se denna tidskr. årg. 4, sid. 149 o. f.

Därav följer, att x_0 och $2y_0$ även äro rel. primtal. Således äro x_0 och y_0 »kateter» i en pytagoreisk triangel och likaså x_0 och $2y_0$.

Enligt teorien för dylika trianglar[1] kan man alltså finna två pos., *rel. prima* hela tal u och v av olika paritet, så att

$$x_0 = u^2 - v^2, \quad 2y_0 = 2uv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

och likaledes de analoga talen p och q, så att

$$x_0 = p^2 - q^2, \quad y_0 = 2pq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Vi urskilja nu tvenne fall allteftersom u är jämnt och v udda eller tvärtom.

Första fallet: $u = 2\bar{u}$. Ur (1) och (2) få vi då

$$\bar{u}v = pq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$4\bar{u}^2 - v^2 = p^2 - q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Vi införa följande tal ($\geqq 1$):

λ = största gem. div. till $\bar{u}$ och p

μ = » » » » $\bar{u}$ » q

ϱ = » » » » v » p

σ = » » » » v » q.

De fyra positiva hela talen λ, μ, ϱ, σ ha då tydligen ingen gemensam faktor $\neq 1$ två och två.

Ur detta följer nu

$$\bar{u} = \lambda\mu \cdot m$$

$$v = \varrho\sigma \cdot n$$

$$p = \lambda\varrho \cdot s$$

$$q = \mu\sigma \cdot t,$$

således ur (3)

$$\lambda\mu\varrho\sigma \cdot mn = \lambda\mu\varrho\sigma \cdot st$$

$$\therefore \quad mn = st,$$

men då m, n, s, t ej hava någon gemensam faktor två och två, så följer att $m = n = s = t = 1$ och således

$$\bar{u} = \lambda\mu, \quad v = \varrho\sigma, \quad p = \lambda\varrho, \quad q = \mu\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

[1] l. c.

Insättas dessa värden i (4), erhålles

$$4\lambda^2\mu^2 - \varrho^2\sigma^2 = \lambda^2\varrho^2 - \mu^2\sigma^2$$

eller
$$(4\lambda^2+\sigma^2)\mu^2 = (\lambda^2+\sigma^2)\varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

α) $\lambda^2+\sigma^2$ och $4\lambda^2+\sigma^2$ rel. primtal. Då måste

$$\lambda^2+\sigma^2 = \mu^2$$
$$4\lambda^2+\sigma^2 = \varrho^2,$$

d. v. s. vårt system (A) skulle ha lösningen

$$x_1=\sigma,\ y_1=\lambda,\ a_1=\mu,\ b_1=\varrho.$$

Men detta är orimligt, ty enl. (5) och (1) är

$$a_1=\mu \leqq \bar{u} \leqq \frac{y_0}{2} < y_0 < a_0,$$

d. v. s. (x_1, y_1, a_1, b_1) skulle vara en »mindre» lösning än (x_0, y_0, a_0, b_0) i strid med vårt antagande.

β) $\lambda^2+\sigma^2$ och $4\lambda^2+\sigma^2$ ha en gemensam faktor > 1. Denna faktor måste vara 3, emedan den skall gå jämnt upp i såväl $4\lambda^2+\sigma^2-(\lambda^2+\sigma^2)=3\lambda^2$ som i $4(\lambda^2+\sigma^2)-(4\lambda^2+\sigma^2)=3\sigma^2$ och dessa tal ha st. gem. div. 3. I detta fall få vi ur (6)

$$\frac{4\lambda^2+\sigma^2}{3}\cdot\mu^2 = \frac{\lambda^2+\sigma^2}{3}\cdot\varrho^2$$

och sedan som i α)

$$\lambda^2+\sigma^2 = 3\mu^2$$
$$4\lambda^2+\sigma^2 = 3\varrho^2.$$

Även detta är emellertid orimligt. Då nämligen

$$(3k\pm1)^2 = 3K+1,$$

kan $\lambda^2+\sigma^2$ ej vara multipel av 3 med mindre både λ och σ äro jämnt delbara med 3, vilket strider mot dessa tals natur.

Andra fallet: $v=2\bar{v}$. I stället för (3) och (4) få vi då

$$u\bar{v} = pq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$
$$4\bar{v}^2 - u^2 = q^2 - p^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Detta system skiljer sig endast genom beteckningen från det förra och dess diskussion leder till samma resultat. Antagandet att systemet (A) har en lösning i positiva hela

tal leder alltså till idel orimliga konsekvenser och därmed är vår sats bevisad.

De enda lösningar i hela tal (pos., neg. eller 0), som finnas till systemet (A), äro alltså de triviala:

$$x=y=a=b=0$$
$$x=\pm a=\pm b\neq 0,\ y=0$$
$$x=0,\ a=\pm y,\ b=\pm 2y,\ y\neq 0.$$

Detta faktum kan också uttryckas så: *Det är omöjligt att finna tvenne rätvinkliga trianglar, i vilka alla sidors mätetal äro hela och som ha en katet gemensam, om de bägge andra kateterna skola förhålla sig som 2 : 1.*

Ur denna sats vilja vi härleda några följdsatser.

1. *Ekvationen*

$$u^4-u^2v^2+v^4=w^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

har inga andra heltalslösningar än de triviala

$$u=0,\ w=\pm v^2;\ v=0,\ w=\pm u^2;\ u=\pm v,\ w=\pm v.$$

Ekv. kan nämligen skrivas

$$(u^2-v^2)^2+(uv)^2=w^2$$

och funnes en annan lösning i hela tal än de angivna, skulle

$$|u^2-v^2|,\ |uv|,\ |w|$$
$$|u^2-v^2|,\ |2uv|,\ u^2+v^2$$

vara ett par trianglar av det slag, som icke existera enligt vår sats.

2. *Ekvationen*

$$r^4+14r^2s^2+s^4=t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

har inga andra heltalslösningar än de triviala

$$r=0,\ t=\pm s^2;\ s=0,\ t=\pm r^2;\ r=\pm s,\ t=\pm 4s^2.$$

Ekv. (C) kan nämligen skrivas

$$(r+s)^4-(r+s)^2(r-s)^2+(r-s)^4=t^2$$

och är därmed återförd på (B).

3. *Det finnes icke 4 positiva hela (eller ens rationella) tal i aritmetisk serie, vilkas produkt är jämn kvadrat.*

[De enda 4-termiga aritmetiska serier med rationella termer, som ha denna egenskap (att termernas produkt är kvadraten på ett rationellt tal), äro de triviala serier, som innehålla en term 0 eller ha alla termer lika, samt de, i vilka termernas aritmetiska medium är 0, alltså en serie av typen $-3d, -d, d, 3d$.]

Antag, att det funnes en icke trivial serie med denna egenskap och antag vidare att differensen är ett jämnt tal (detta kan, om det ej från början är fallet, ernås genom fördubbling av alla termer, varvid termproduktens egenskap av jämn kvadrat ju bibehålles). Vi kunna då kalla termernas aritmetiska medium u och differensen $2v$, där u och v äro positiva hela tal och få ekvationen

$$(u-3v)(u-v)(u+v)(u+3v)=w^2, \quad . \; . \; . \quad (D)$$

där w även är ett helt tal.

Om vi nu sätta $w=x(u+v)(u+3v)$, så är x ett rationellt positivt tal. Insättes detta värde i (D) följer

$$(u-3v)(u-v)=x^2(u+v)(u+3v)$$

eller $$(x^2-1)u^2+4(x^2+1)uv+3(x^2-1)v^2=0 \quad . \; . \quad (7)$$

Löses denna ekvation med avseende på $\frac{u}{v}$, skall man finna ett rationellt värde. Alltså måste

$$4(x^2+1)^2-3(x^2-1)^2=z^2,$$

där z är ett rationellt tal, d. v. s.

$$x^4+14x^2+1=z^2$$

skulle ha en lösning (x_0, z_0) i pos. rat. tal.

Om då $x_0=\frac{r}{s}$, få vi

$$r^4+14r^2s^2+s^4=(s^2z)^2,$$

där s^2z måste vara ett helt tal, d. v. s. enl. följdsats 2 $r=s$ (de andra möjligheterna uteslutna, då x_0 är positivt), $x_0=1$, $uv=0$ (7), som strider mot antagandet. Alltså är antagandet orimligt. Det är lätt men av underordnat intresse att skärpa beviset, så att det gäller för den något allmännare formulering av satsen, som ovan angivits inom parentes. Ekv. (D)

har inga andra lösningar än dem, som ge de triviala serierna.

4. Än mer omöjligt, om möjligt, är att finna *fyra jämna kvadrater i aritmetisk serie i de naturliga talens rad.* Deras produkt måste ju vara jämn kvadrat och detta är omöjligt enligt föregående följdsats. Däremot finnas *tre* naturliga kvadrattal i aritmetisk serie t. ex. 1, 25, 49 och i allmänhet $k^2(u^2-2uv-v^2)^2$, $k^2(u^2+v^2)^2$, $k^2(u^2+2uv-v^2)^2$ där k, u och v äro hela tal.

Sats 2. *Systemet*

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2\\ x^2+9y^2&=b^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

kan icke lösas med positiva heltalsvärden på x, y, a, b.

Vi antaga, att en sådan lösning finnes och, ifall det finnes fler, må x_0, y_0, a_0, b_0 vara den »minsta», d. v. s. den (ev. en av dem), som har (ha) minsta möjliga a-värdet. Som i beviset för sats 1 inses då omedelbart att x_0 och y_0 äro relativa primtal, så att x_0, y_0, a_0 mäta sidorna i en pytagoreisk triangel. Då vidare endera x_0 eller y_0 måste vara jämnt delbart med 3 (ty vore x_0, y_0 bägge av formen $3k\pm1$, skulle a_0^2 ha formen $3K+2$, vilket är omöjligt emedan $(3k\pm1)^2=3K+1$ och $(3l)^2=3L$), sluta vi, att det är y_0, som innehåller faktorn 3, medan x_0 ej är multipel av 3. Vore nämligen motsatsen fallet, skulle $x_1=y_0$, $y_1=\frac{x_0}{3}$, $a_1=\frac{b_0}{3}$, $b_1=a_0$ vara en »mindre lösning», ty $\frac{b_0}{3}<a_0$ av samma skäl som i sats 1. Även x_0, $3y_0$, b_0 äro alltså mätetalen för sidorna i en pytagoreisk triangel.

Första fallet: x_0 *udda,* y_0 *jämnt.* Enligt teorien för pytagoreiska trianglar existera två par positiva tal u, v och p, q så att

$$\begin{aligned} x_0&=u^2-v^2=p^2-q^2\\ 3y_0&=2uv;\ y_0=2pq. \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

u och v äro relativa primtal; p och q likaså.

Andra fallet: x_0 *jämnt,* y_0 *udda.* Då finnas två par positiva udda tal u, v och p, q så att

$$x_0 = \frac{u^2 - v^2}{2} = \frac{p^2 - q^2}{2}$$

$$3y_0 = uv;\quad y_0 = pq \qquad \ldots\ldots \quad (8')$$

Även här äro u och v rel. primtal; p och q likaså.

Vi skola nu bevisa, att vårt antagande är absurt och börja med

Första fallet α: $u = 3u$, v ej multipel av 3.

Ur (8) erhålles

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}v &= pq \\ 9\bar{u}^2 - v^2 &= p^2 - q^2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots \quad (8\alpha)$$

Ur första ekvationen och våra antaganden beträffande u, v, p, q följer existensen av de fyra positiva hela talen λ, μ, ϱ, σ ($\geqq 1$), relativa primtal två och två, i vilka u, v, p, q kunna uttryckas så:

$$\bar{u} = \lambda\mu,\ v = \varrho\sigma,\ p = \lambda\varrho,\ q = \mu\sigma.$$

Insättas dessa värden i andra ekvationen av (8α), får man efter en enkel reduktion

$$(9\lambda^2 + \sigma^2)\mu^2 = (\lambda^2 + \sigma^2)\varrho^2 \qquad \ldots\ldots \quad (9\alpha)$$

Om nu $9\lambda^2 + \sigma^2$ och $\lambda^2 + \sigma^2$ först äro rel. primtal, följer

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + \sigma^2 &= \mu^2 \\ 9\lambda^2 + \sigma^2 &= \varrho^2 \end{aligned}\right\}$$

d. v. s. systemet (E) har lösningen

$$x_1 = \sigma,\ y_1 = \lambda,\ a_1 = \mu,\ b_1 = \varrho.$$

Men detta är orimligt, ty

$$a_1 = \mu \leqq \bar{u} \leqq \frac{y_0}{2} < y_0 < a_0.$$

Ha åter $9\lambda^2 + \sigma^2$ och $\lambda^2 + \sigma^2$ en gemensam faktor > 1, måste denna vara 2^n, $n = 1, 2, 3$, ty denna faktor skall ingå i $9\lambda^2 + \sigma^2 - (\lambda^2 + \sigma^2) = 8\lambda^2$ och i $9(\lambda^2 + \sigma^2) - (9\lambda^2 + \sigma^2) = 8\sigma^2$.

Under denna förutsättning erhålles ur (9α)

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + \sigma^2 &= 2^n \cdot \mu^2 \\ 9\lambda^2 + \sigma^2 &= 2^n \cdot \varrho^2 \end{aligned}\right\},\ n = 1,\ 2,\ 3.$$

λ och σ måste ha samma paritet och äro alltså bägge udda, då de ju äro rel. primtal. Men summan av två udda kvadrater kan ej vara divisibel med 4 såsom lätt visas genom att sätta $a=2m+1$, $b=2n+1$. Då blir $a^2+b^2=4k+2$. Därför måste således $n=1$ och både μ och ϱ äro även udda. Vidare följer

$$8\lambda^2=2(\varrho^2-\mu^2).$$

Här är högsta i vänstra membrum ingående 2-potens således 2^3, medan högra membrum i varje fall innehåller 2^4, emedan

$$\left.\begin{aligned}(2k+1)^2&=4(k+1)k+1=8K+1\\(2l+1)^2&=4(l+1)l+1=8L+1\end{aligned}\right\}$$
$$\therefore\ (2k+1)^2-(2l+1)^2=8(K-L).$$

Alltså en orimlig konsekvens.

Första fallet β: $v=3\bar{v}$, u ej multipel av 3.

Vi få då det med (8α) fullständigt analoga systemet

$$\left.\begin{aligned}u\bar{v}&=pq\\9\bar{v}^2-u^2&=q^2-p^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8\beta)$$

och diskussionen leder till orimligheter precis som i föregående fall.

Andra fallet α: $u=3\bar{u}$, v ej delbart med 3.

Vi få systemet

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}v&=pq\\9\bar{u}^2-v^2&=p^2-q^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8'\alpha)$$

och som följd därav ekv.

$$(9\lambda^2+\sigma^2)\mu^2=(\lambda^2+\sigma^2)\varrho^2 \quad \ldots\ldots \quad (9'\alpha)$$

Här äro λ, μ, ϱ, σ alla udda, emedan u, v, p, q alla äro udda. $9\lambda^2+\sigma^2$ och $\lambda^2+\sigma^2$ ha alltså den gemensamma faktorn 2, vilket leder till en motsägelse som i första fallet α.

Andra fallet β: $v=3v$, u ej div. med 3. Fullständigt analogt med föregående fall.

Därmed ha vi påvisat att vårt antagande är orimligt. Systemet (E) kan icke lösas i positiva hela tal. De enda

heltalslösningarna överhuvud äro de triviala, i vilka x eller y försvinna.

I geometrisk klädnad kan detta uttryckas så:

Det är omöjligt att finna tvenne rätvinkliga trianglar, i vilka alla sidor mätas med hela (eller ens rationella) tal, som ha en katet gemensam och i vilka de bägge andra kateterna förhålla sig som 3 : 1.

Även ur sats 2 vilja vi härleda några enkla följdsatser.

1. *Det finnes ingen likbent triangel, i vilken mätetalen för alla sidor och alla medianer äro hela tal.* Ty kallas benen i en sådan triangel x, basen y, höjden h och en annan median m, så skulle vi hava

$$m^2=\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{x}{4},$$

således

$$4m^2=x^2+2y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

och vidare

$$h^2=x^2-\frac{y^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Elimineras x^2 mellan dessa, så fås

$$(2h)^2+9y^2=(4m)^2$$

och ur (2)

$$(2h)^2+y^2=(2x)^2,$$

vilka enligt det föregående äro oförenliga. Alltifrån Euler känner man däremot hela serier av icke likbenta trianglar, i vilka alla sidor och medianer mätas av hela tal. Den »minsta» har sidorna 136, 170, 174 och medianerna 158, 131, 127.

2. *Ekvationen*

$$\frac{x^2+1}{x^2+9}=y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

har inga andra lösningar i rationella tal än de triviala $x=0$, $y=\pm\frac{1}{3}$. Ty antag, att $x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{p}{q}$ vore än annan lösning. Vi kunna fastställa att u och v äro hela, positiva, rel. prima tal; p och q likaså.

Då skulle $$\frac{u^2+v^2}{u^2+9v^2}=\frac{p^2}{q^2}.$$

Äro u^2+v^2 och u^2+9v^2 rel. prima, skulle därav följa

$$u^2+v^2=p^2$$
$$u^2+9v^2=q^2$$

i strid med sats 2. Ha åter u^2+v^2 och u^2+9v^2 en gemensam faktor, måste denna enligt beviset för sats 2 var 2^n, $n=1, 2, 3$ och då vore

$$u^2+v^2=2^n\cdot p^2$$
$$u^2+9v^2=2^n\cdot q^2,$$

vilket också är omöjligt enligt beviset för sats 2.

3. *Det är omöjligt att finna 4 hela tal i aritmetisk serie, vilkas produkt är* $-w^2$, *där* w *är ett helt tal*, om man undantager de triviala fall, då ett av talen försvinner. Ty vi kunna, om problemet vore lösbart, utan vidare antaga differensen jämn och låta talen vara

$$u-3v,\ u-v,\ u+v,\ u+3v \text{ (alla } \neq 0),$$

där $v\neq 0$. Då skulle

$$(u^2-v^2)(u^2-9v^2)=-w^2 \quad . \ . \ . \ . \quad (D')$$

d. v. s.

$$\frac{u^2-v^2}{u^2-9v^2}=-\left(\frac{w}{u^2-9v^2}\right)^2$$

och ekv.

$$\frac{x^2-1}{x^2-9}=-y^2$$

skulle ha den rationella lösningen

$$x=\frac{u}{v},\ y=\frac{w}{u^2-9v^2}.$$

Då skulle

$$\frac{1+y^2}{1+9y^2}=\frac{1}{x^2},\quad \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{y}\right)^2+9}=\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

vilket strider mot satsen om ekv. (F).

4. *Ekvation* $r^4-14r^2s^2+s^4=t^2$ . . . . . (C')

har inga andra lösningar i hela tal än de triviala

$$r=0,\ t=\pm s^2;\ s=0,\ t=\pm r^2.$$

Ty antag, att r, s, t vore en annan lösning. Då skulle ekv.

$$x^4-14x^2+1=y^2$$

ha den rationella lösningen

$$x_0=\frac{r}{s},\ y_0=\frac{t}{s^2},\ x_0\neq 0.$$

Då skulle vidare den i u och v homogena ekv.

$$(u-3v)(u-v)=-x_0^2(u+3v)(u+v)$$

eller $$(1+x_0^2)u^2-4(1-x_0^2)uv+3(1+x_0^2)v^2=0$$

ge rationella värden f_1, f_2 på förhållandet $\frac{u}{v}$, emedan diskriminanten är

$$4\{4(1-x_0^2)^2-3(1+x_0^2)^2\}=4\{x_0^4-14x_0^2+1\},$$

d. v. s. $(2y_0)^2$, alltså jämn kvadrat. Väljer man sedan två hela tal u_0, v_0 med t. ex. förhållandet f_1, blir

$$(u_0-3v_0)(u_0-v_0)(u_0+v_0)(u_0+3v_0)=$$
$$=-[x_0(u_0+3v_0)(u_0+v_0)]^2=-w_0^2$$

och, då $x_0\neq 0$, kan ingen faktor i vänstra membrum försvinna i strid med föregående följdsats 3.

Jag sammanställer slutligen de system och ekvationer, som här ha visats besitta endast triviala lösningar i hela tal.

(A) $\left.\begin{matrix}x^2+y^2=a^2\\ x^2+4y^2=b^2\end{matrix}\right\}$ (E) $\left.\begin{matrix}x^2+y^2=a^2\\ x^2+9y^2=b^2\end{matrix}\right\}$

(B) $$u^4-u^2v^2+v^4=w^4$$

(C och C') $$u^4\pm 14u^2v^2+v^4=w^4$$

(D och D') $$(u-3v)(u-v)(u+v)(u+3v)=\pm w^2.$$

Ur dessa kunna naturligtvis genom lineära substitutioner t. ex. hur många som helst med samma egenskap härledas.

Av olösbarheten hos systemen (A) och (E) får man ej låta förleda sig att tro på olösbarheten hos systemet

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ x^2 + n^2 \cdot y^2 &= b^2 \end{aligned}\right\}$$

för heltalsvärden på n i allmänhet.

Exemplet

$$\left.\begin{aligned} 35^2 + 12^2 &= 37^2 \\ 35^2 + 10^2 \cdot 12^2 &= 125^2 \end{aligned}\right\}$$

grusar alla förhoppningar i den vägen.

Om beräkning av logaritmer.

Av H. PETRINI.

I läroböcker i algebra brukar det stundom förekomma en antydan om hur man skulle kunna beräkna en logaritmtabell. Ändamålet härmed är, att lärjungen ej skall stå alldeles oförstående för tillkomsten av de tabeller han använder. Någon motsvarighet härtill förekommer ej i fråga om de trigonometriska tabellerna, låt vara att lärjungen för förståendet av dessa har hjälp av den empiriska metoden. Ingendera av dessa försök att förklara tabellernas uträkning är dock tillfredsställande, så länge man ej använder funktionernas serieutveckling.

Även ur allmänbildningssynpunkt är det lämpligt att införa lärjungarna i elementen av läran om serieutvecklingar, då ju dessa äro av grundläggande betydelse för matematiken. Man behöver ej använda någon särskild tid härpå, om man behandlar serieutvecklingen som övningsexempel på differentialkalkylen. Det är sålunda en god övning för nybörjare att låta dem sätta

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + \ldots + a_n x^n \quad . \quad . \quad (1)$$

och bestämma koefficienterna genom upprepade deriveringar och insättning av värdet $x=0$.

Ersättes vänstra ledet i (1) med beteckningen $f(x)$ och upprepas samma förfarande, får man

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^r}{\underline{|r}} f^{(r)}(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(0). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Om man ej anser sig kunna medhinna härledningen av någon användbar form för resttermen i Taylors serie, kan

man nöja sig med att omnämna, att man kan bevisa, att serien

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r+\ldots \text{ in inf.} \quad . \quad (3)$$

låter derivera sig term för term, om det finns något tal R, som är numeriskt större än x och sådant, att serien $f(R)$ är konvergent. Med denna upplysning utsträckes formeln (2) till oändligt många termer, d. v. s. att serien (3) kan skrivas

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\ldots+\frac{x^r}{\lfloor r}f^{(r)}(0)+\ldots \text{ in inf.} \quad (4)$$

Man påpekar nu, att en funktion $F(x)$, som är på annat sätt definierad än genom en ekvation av formen (3) ej nödvändigt behöver kunna utvecklas i en potensserie, t. ex.

$$e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot f(x).$$

Därest man ej har härlett något uttryck på resttermen, får man även här nöja sig med att omnämna, att man kan bevisa, att funktionerna

$$(1+x)^\alpha,\ e^x,\ \sin x,\ \cos x \text{ och } {}^e\log(1+x)$$

låta utveckla sig i potensserier och alltså kunna framställas under formen (4). Utförandet av dessa serieutvecklingar utgör en synnerligen god övningsuppgift för nybörjare.

På grund av den hastiga konvergensen inses omedelbart, huru de trigonometriska tabellerna kunna beräknas. Värre blir det med logaritmtabellen, då ju serieutvecklingen

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\ldots \text{ in inf.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dels endast gäller, om

$$x \text{ är numeriskt} < 1 \text{ eller} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

och dels är mycket långsamt konvergent, om x ej är mycket litet. Man har därför vid beräkningen av logaritm-

tabellen måst tillgripa varjehanda knep för att göra beräkningen lättare. Först och främst är det tydligt, att man räknar ut de naturliga logaritmerna, innan man övergår till basen 10, de Brigg'ska.

Det är inte min mening att här lämna en översikt av de metoder, som faktiskt ha använts vid logaritmberäkningar, utan jag vill blott framlägga en metod, enligt vilken lärjungen lätt inser, hurusom man kan med relativt litet arbete upprätta en logaritmtabell. Härvid har jag närmast tänkt på fyrställiga tabeller, låt vara att beräkningarna på grund av mina seriers hastiga konvergens lätteligen kunna utföras för 5-, 7-, ja ända till 20-ställiga tabeller och därutöver.

Tydligt är, att man endast behöver beräkna primtalens logaritmer med serieutvecklingen (5), då ju de övriga talens logaritmer lätt härledas ur dessa.

Om x är numeriskt $< 0{,}1$ erhålles i ekv. (5) en ny riktig decimal för varje term. Vill man ha fyra riktiga decimaler, så är det således tillräckligt att taga med de fyra första termerna i serieutvecklingen; är x numeriskt $< 0{,}01$ räcker det med endast två termer. Är däremot $x = \frac{1}{5}$, så är $x^3 = \frac{1}{125} < 0{,}01$, och i detta fall behövs det tre termer, för att man skall få två nya säkra decimaler, alltså sex termer för fyra decimaler. Metoden går nu ut på att finna sådana serieutvecklingar, att x är mycket litet och dess lägre dignitet mycket lätt uträknade i decimalbråk.

Den största svårigheten erbjuder uppsökandet av formler för beräkningen av logaritmerna för talen 2, 3 och 5. Det erbjuder dock ingen svårighet att a posteriori konstatera riktigheten av följande

Teorem: l2, l3 och l5 kunna beräknas medelst kvantiteterna α, β *och* γ, *där*

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= l\left(1 - \tfrac{4}{100}\right) \\ \beta &= l\left(1 + \tfrac{2}{10}\right) \\ \gamma &= l\left(1 - \tfrac{1}{10}\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

nämligen

$$\left.\begin{aligned} l2 &= 3\beta - \alpha - \gamma \\ 2l5 &= 5l2 + \gamma - \alpha - \beta \\ 2l3 &= \gamma + l10 . \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

För beräkningen av talen α, β och γ användes serieutvecklingen (5), där x är numeriskt $\leqq 0{,}1$ för talen α och γ, men $= \frac{1}{5}$ för β.

Det går sedan lätt att finna rätt skarpt konvergenta serier för beräkning av följande primtal. För talet 7 kan man betjäna sig av serieutvecklingen av talet $0{,}98 = 1 - 0{,}02$,

$$\because \ 2l7 = l(1 - 0{,}02) + l100 - l2 .$$

För 11 har man $0{,}99 = 1 - 0{,}01$,

$$\because \ l11 = l(1 - 0{,}01) + l100 - 2l3 .$$

På analogt sätt fås

$$l13 = l(1 + 0{,}04) + l100 - 3l2$$
$$l17 = l(1 + 0{,}02) + l100 - l6$$
$$l19 = l(1 - 0{,}05) + l100 - l5 \text{ etc.}$$

Beräkningar. Man beräknar först α, β och γ med sex decimaler och får då $l2$, $l5$ och $l3$ med fem exakta decimaler. Man finner

$$\alpha = l(1 - 0{,}01) = -0{,}04 - 0{,}0008 - 0{,}000021 - 0{,}000001 = \\ = -0{,}040822 .$$

$$\beta = l(1 + 0{,}2) = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}002667 - 0{,}0004 + \\ + 0{,}000064 - 0{,}000011 + 0{,}000002 = 0{,}182321 .$$

$$\gamma = l(1 - 0{,}1) = -0{,}1 - 0{,}005 - 0{,}000333 - 0{,}000025 - \\ - 0{,}000002 = -0{,}105360 ,$$

$\because$ enl. (8) $l2 = 0{,}69315$, $l5 = 1{,}60944$, $l3 = 1{,}09861$.

Med tillhjälp av dessa logaritmer beräknas sedan de övriga med lätthet med fyra decimaler. Sedan erhållas 10-logaritmerna genom att dividera dem med

$$l10 = l2 + l5 = 2{,}30259$$

eller multiplicera dem med dettas inverterade värde, »modylen» $M = 0{,}43429$.

Beräkning av månens massa.

Av GUST. FORSSTRÖM.

I teorin för ebb och flod förutsättes bl. a. kännedom om månens massa i förhållanden till jordens. Då det på elementarstadiet ej kan vara tal om att upptaga någon av de astronomiska fackmännens beräkningsmetoder, nöja sig även större läroböcker[1] med att utan närmare motivering anföra det behövliga siffervärdet på ifrågavarande storhet.

Självfallet bör en dylik nödfallsåtgärd, såvitt möjligt, undvikas och kan det också, såsom torde framgå av det följande. där endast rent elementära kunskaper krävas.

Med tillräcklig noggrannhet kan antagas, att månen och jorden beskriva cirkulära banor med lika omloppstider kring en gemensam medelpunkt P, varvid jordens och månens massor (m_1 och m_2) tänkas samlade i dessa kroppars resp. medelpunkter (O_1 och O_2 i fig. 1). Punkten P:s läge på centrilinjen O_1O_2 beräknas då enligt formeln för centripetalkraften (T = omloppstiden)

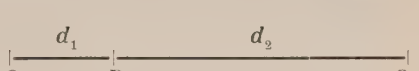


Fig. 1.

$$\frac{4\pi^2 m_1 d_1}{T^2} = \frac{4\pi^2 m_2 d_2}{T^2}$$

eller

$$m_1 d_1 = m_2 d_2.$$

P är följaktligen jordens och månens masscentrum.

Den erforderliga centripetalkraften tages uppenbarligen från den mellan jorden och månen rådande allmänna attrak-

[1] T. ex. de för universitetsstudier avsedda välbekanta läroböckerna i fysik av Christiansen och Grimsehl eller »Handbok i allmän astronomi» av Dunér.

tionskraften (c = gravitationskonstanten), vadan

$$\frac{4\pi^2 m_1 d_1}{T^2} = \frac{c m_1 m_2}{(d_1+d_2)^2}.$$

Betecknas vidare avståndet mellan jordens och månens medelpunkter med d, jordradien med r (jorden antas fullt sfärisk) och tyngdkraftens acceleration på jordytan med g, blir vårt ekvationssystem

$$\left.\begin{array}{rr} (1) \ldots\ldots\ldots & d_1+d_2=d \\ (2) \ldots\ldots\ldots & m_1 d_1 = m_2 d_2 \\ (3) \ldots\ldots\ldots & \dfrac{4\pi^2 d_1}{T^2} = \dfrac{c m_2}{d^2} \\ (4) \ldots\ldots\ldots & g = \dfrac{c m_1}{r^2} \end{array}\right\}.$$

Divideras (3) med (4), erhålles med hänsyn till (2)

$$\frac{4\pi^2 d_1}{g T^2} = \frac{m_2 r^2}{m_1 d^2} = \frac{d_1 r^2}{d_2 d^2},$$

d. v. s.

$$\frac{4\pi^2 d_2}{g T^2} = \frac{r^2}{d^2}$$

eller

$$d_2 = \frac{g r^2 T^2}{4\pi^2 d^2}.$$

Men enligt (1) är

$$d_1 = d - d_2,$$

alltså fås

$$(5) \ldots\ldots \frac{m_2}{m_1}\left(=\frac{d_1}{d_2}=\frac{d}{d_2}-1\right)=\frac{4\pi^2 d^3}{g r^2 T^2}-1.$$

Att det sökta förhållandet mellan månens och jordens massor nu är funnet inses lätt, eftersom r kan beräknas genom en gradmätning, därefter d med tillhjälp av månens horisontalparallax[1] samt accelerationen vid fritt fall och månens omloppstid kring jorden genom kända metoder.

[1] Hur denna bestämmes visas t. ex. i Laurins lärobok i trigonometri.

Enligt Newcomb-Engelmanns »Populäre Astronomie» är

$$\frac{m_2}{m_1} = 0{,}0124.$$

Detta värde skall nu jämföras med det, som framgår ur (5) genom att där insätta de ur samma arbete hämtade siffervärdena på d (= aritmetiska mediet mellan månens största och minsta jordavstånd), r (= aritmetiska mediet mellan ekvators- och polarradien), T (= månens sideriska omloppstid) samt g (= tyngdaccelerationen vid 45° latitud). Man har

$$d = 384\,420\,000 \text{ m},$$
$$r = 6\,367\,500 \text{ m},$$
$$T = 2\,360\,600 \text{ sek},$$
$$g = 9{,}806 \ \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$$

och finner härav

$$\frac{m_2}{m_1} = 0{,}0123,$$

d. v. s. en så god överensstämmelse med nyss anförda värde på detta förhållande, som med ovanstående data kan begäras. I båda fallen blir resultatet, att månens massa i runt tal är $\frac{1}{81}$ av jordens. Medtagas flera värdebetecknade siffror på storheterna i högra ledet av (5), fås med användande av sjuställiga logaritmer $m_1 = 81{,}5\,m_2$, under det att »Monthly Notices . . .» uppger det på fackmässig väg erhållna nyaste medelvärdet $m_1 = 81{,}53\,m_2$.

Givetvis måste det vara med en känsla av tillfredsställelse, lärjungen finner sig redan på skolbänken behärska problemet att avväga mot varandra två himlakroppar — låt vara att den ena är så lättillgänglig som den planet, han själv bebor, och den andra dess närmaste granne i världsrymden.

Om ljusets prismatiska avböjning.

Av KURT MOLIN.

I den mån som matematikstudiet på allt tidigare skolstadier ledes in på infinitesimalkalkylens område,[1] kommer matematikundervisningen icke blott att fylla sin egen uppgift utan giver dessutom den studerande ett redskap i sin hand vid studiet av fysiken, mekaniken och kemien. Undervisningen i nämnda ämnen kommer därför vad dess begreppsmässiga sida beträffar att undergå en genomgripande förändring. De förvärvade matematikkunskaperna erbjuda sig osökt till användning även vid fysiklaborationerna. Försöken kunna då i allmänhet grundligt teoretiskt genomtänkas, toleransberäkningen kan utföras och ger därmed åt den utvalda metoden full ändamålsenlighet genom att tillåta ett målmedvetet utnyttjande av de instrumentella resurserna. De experimentella resultaten kunna kritiskt värdesättas. Beträffande experimentets rent fysiska sida måste anordningen fullständigt utnyttjas för ett så allsidigt belysande av området, som förhållandena medgiva, och de erhållna resultaten avpressas några påtagligare konsekvenser.

Ett försök, som i såväl detta avseende som i ovan berörda synes mig lämpligt på det högre stadiet vid våra läroverk och tekniska gymnasier, är det välkända minimideviationsförsöket. I nedanstående rader har jag sökt skissera dess behandling i anslutning till ovanstående synpunkter.

*

[1] En utveckling som vid de tekniska gymnasierna framtvingats av specialämnenas behov av fördjupade matematiska insikter.

Kännedomen om en glassorts brytningsindices för olika våglängder är nödvändig vid alla konstruktionsberäkningar rörande optiska system. För bestämning av n kan man förfara så,[1] att av glasprovet i fråga slipas ett prisma, som undersökes enligt minimideviationsmetoden med begagnande av homogent ljus, då man för varje använd våglängd finner motsvarande brytningsindex. Prismats brytande vinkel φ göres gärna c:a 60°.

Får S (fig. 1) beteckna ett smalt knippe parallella strålar homogent ljus av våglängden λ, som infaller under vinkeln i_1 mot ett isotropt prisma omgivet av luft, och antages strålknippet ligga i ett plan vinkelrätt emot prismats brytande kant, således i ett huvudsnitt, erhållas — då ju strålknippet även efter brytningen förblir i huvudsnittet — med hjälp av Snellius' brytningslag i enlighet med fig. 1 följande ekvationer:

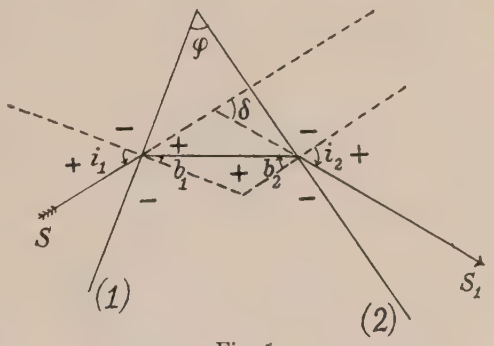


Fig. 1.

$$\sin i_1 = n \sin b_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sin i_2 = n \sin b_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\varphi = b_1 + b_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\delta = i_1 - b_1 + i_2 - b_2 = i_1 + i_2 - \varphi \quad (4)$$

φ betecknar prismats brytande vinkel och δ deviationsvinkeln. Indices 1 och 2 gälla för första resp. andra gränsytan.

Av fig. 1 framgår direkt, att δ i första hand måste bero av vinkeln b_1. För att undersöka sambandet mellan δ och b_1 bildas $\frac{d\delta}{db_1}$ och $\frac{d^2\delta}{db_1^2}$.

[1] Angående olika metoder för bestämning av n medelst prisma, se t. ex. Chwolson, Lehrbuch der Physik, Bd. II, 1904, S. 368.

Ekv. (4) giver:

$$\frac{d\delta}{db_1}=\frac{di_1}{db_1}+\frac{di_2}{db_1} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Av ekv. (1) erhåller man ett uttryck på $\frac{di_1}{db_1}$:[1]

$$\cos i_1 \frac{di_1}{db_1}=n\cos b_1;$$

$$\frac{di_1}{db_1}=\frac{n\cos b_1}{\sqrt{1-n^2\sin^2 b_1}} \quad \ldots\ldots (6)$$

Av ekv:a (2) och (3) fås:

$$\sin i_2=n\sin(\varphi-b_1)$$

och på samma sätt som ovan

$$\frac{di_2}{db_1}=-\frac{n\cos(\varphi-b_1)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\varphi-b_1)}}. \quad \ldots\ldots (7)$$

Villkoret för att δ skall bli ett maximum eller ett minimum innefattas däri, att $\frac{d\delta}{db_1}=0$. Av (5), (6) och (7) erhålles alltså

$$\frac{n\cos b_1}{\sqrt{1-n^2\sin^2 b_1}}-\frac{n\cos(\varphi-b_1)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\varphi-b_1)}}=0. \quad \ldots (8)$$

Denna ekv. löses med avseende på b_1 genom andra termens överflyttning till högra membrum, därpå följande kvadrering och invertering.

$$\frac{1-n^2\sin^2 b_1}{n^2\cos^2 b_1}-1=\frac{1-n^2\sin^2(\varphi-b_1)}{n^2\cos^2(\varphi-b_1)}-1.$$

Gjorda liknämniga reducera sig uttrycken till

$$\frac{1-n^2}{n^2\cos^2 b_1}=\frac{1-n^2}{n^2\cos^2(\varphi-b_1)},$$

varur erhålles

$$\varphi=2b_1 \text{ och } \varphi=0.$$

[1] Då den prismatiska dispersionen ej här upptages till behandling, betraktas n såsom konstant.

Av intresse blir endast lösningen

$$b_1 = \frac{\varphi}{2},$$

vilken även direkt kunde framgå genom betraktande av den symmetriska formen hos ekv. (8).

Av (5), (6) och (7) erhålles

$$\frac{d^2\delta}{db_1^2} = \frac{n(n^2-1)\sin b_1}{(1-n^2\sin^2 b_1)^{3/2}} + \frac{n(n^2-1)\sin(\varphi - b_1)}{(1-n^2\sin^2(\varphi - b_1))^{3/2}}$$

och

$$\left(\frac{d^2\delta}{db_1^2}\right)_{b_1=\frac{\varphi}{2}} = \frac{2n(n^2-1)\sin\frac{\varphi}{2}}{\left(1-n^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{3/2}}. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Då n är > 1 och $0 < \varphi < \pi$, blir

$$\left(\frac{d^2\delta}{db_1^2}\right)_{b_1=\frac{\varphi}{2}} > 0$$

om

$$1 > n^2\sin^2\frac{\varphi}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Deviationsvinkeln δ har alltså ett minimum för

$$b_1 = b_2 = \frac{\varphi}{2} \text{ och } i_1 = i_2 = i_0.$$

Uttrycket för detta minimivärde blir enligt (4) och (1)

$$\delta_{\min} = 2i_0 - \varphi = 2\arcsin\left(n\sin\frac{\varphi}{2}\right) - \varphi. \quad . \quad . \quad (11)$$

Löses denna ekv. med avseende på n, erhålles

$$n_\lambda = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \delta_{\min}^\lambda)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

där den införda indexen λ får beteckna, att varje våglängd har sitt n_λ-värde och en däremot svarande minimideviationsvinkel $\delta_{\min}^\lambda$ [1].

[1] Denna formel har deducerats på många olika sätt, se t. ex. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, Bd. II, 1909, S. 49. Chwolson, ib., S. 301—305.

Formeln (10) innebär, att

$$|n_\lambda \sin \tfrac{1}{2}\varphi| < 1 .$$

Detta villkor går igen i uttrycket (11), i det att $\delta^\lambda_{\min}$ upphör att existera för

$$|n_\lambda \sin \tfrac{1}{2}\varphi| > 1 .$$

När $|n_\lambda \sin \frac{1}{2}\varphi|$ blir 1, når $\delta^\lambda_{\min}$ sin övre gräns. Den brytande vinkelns övre gränsvärde eller den kritiska brytningsvinkeln blir

$$\varphi_{gr} = 2 \arcsin \left(\frac{1}{n_\lambda}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Den fysikaliska betydelsen härav framgår av följande betraktelse: villkoret för att strålen S_1 skall utträngа ur prismat är, att

$$\sin b_2 < \frac{1}{n_\lambda}.$$

Övergår vinkeln b_2 gränsvinkeln g_λ, inträffar totalreflexion vid andra prismaytan, och strålen av våglängden λ släppes ej genom prismat.

Alltså

$$\left.\begin{aligned} \sin g_\lambda &= \frac{1}{n_\lambda} \\ \varphi_{gr} &= 2 g_\lambda \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13a)$$

För att undersöka gränsbetingelserna för att en stråle skall kunna genomtränga prismat löses (1) med avseende på i_1. Med hjälp av (3), (13a) och (13) erhålles då:

$$\sin i_{1gr} = n_\lambda \sin (\varphi - g_\lambda), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

vilket samband visar, vilka värden i_1 kan antaga, om φ får variera mellan $2g_\lambda$ och 0.

För att kunna grafiskt åskådliggöra de ovanstående sambanden anföres nedanstående exempel. Med ett prisma, vars brytande vinkel φ bestämts till 60° 0′,0, uppmättes, för erhållande av funktionssammanhanget $n = f(\lambda)$, $\delta^\lambda_{\min}$ för 5 kända spektrallinjer, nämligen den röda kaliumlinjen K_α, D-linjen och de tre vätgaslinjerna H_α, H_β, H_γ. För undersökningen användes en liten spektrometer, där medelst

nonier vinklarna bestämdes med en noggrannhet av 1'. Instrumentets justering och mätningarnas utförande skedde på vanligt sätt.[1] Tabell 1 upptar de erhållna värdena.

Tabell 1. $\varphi = 60° 0',0.$

	λ	$\delta^{\lambda}_{\min}$	n_λ	g_λ	$\varphi - g_\lambda$
A' (K_α).....	0,7699	52°39',5	1,6645	36° 55',6	23° 4',4
C (H_α).....	0,6563	53 21,3	1,6713	36 45,0	23 15,0
D (N_α).....	0,5893	53 58,5	1,6771	36 36,2	23 23,8
F (H_β).....	0,4862	55 38,3	1,6929	36 14,8	23 41,2
G' (H_γ).....	0,4341	57 10,3	1,7071	35 51,5	24 8,5

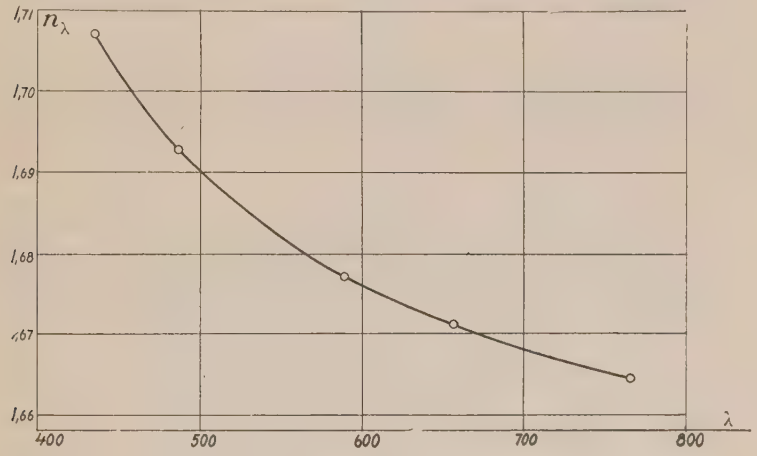


Diagram 1.

De i tabell 1 upptagna λ och n_λ-värdena äro inlagda i diagram 1, som visar, att kurvans tangenter bilda vinklar med λ-axelns pos. riktning, vilka sluta i andra kvadranten. Alltså är $\frac{dn}{d\lambda} < 0$. Dispersionen hos glaset är då, vad man kallar, normal.

För att grafiskt visa deviationsvinkelns δ minimum och

[1] Se t. ex. Müller-Pouillet, ib., S. 176. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik.

samtidigt åskådliggöra, hur δ varierar, kan man utgå ifrån de 4 grundekvationerna (1)—(4). Med kännedom om n och φ kan man för varje våglängd beräkna, hur δ varierar med t. ex. b_1.

Man finner direkt:

$$\delta = \arcsin(n \sin b_1) + \arcsin(n \sin(\varphi - b_1)) - \varphi. \quad . \quad (15)$$

För att få reella värden på δ måste $n \sin b_1 \leq 1$ och samtidigt $n \sin(\varphi - b_1) \leq 1$. Båda villkoren sammanfattas i formeln

$$\varphi - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \leq b_1 \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

eller

$$\varphi - g_\lambda \leq b_1 \leq g_\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16a)$$

Deviationsvinkelns värden bliva symmetriskt grupperade kring

$$b_1 = \frac{\varphi}{2} = 30°$$

som symmetrivärde. För några valda värden på b_1 är δ beräknad enligt formeln (15). Värdena äro upptagna i tabell 2 och inprickade i diagram 2.

Tabell 2.

Beräknade värden på δ.

n_λ	g_λ / $\varphi - g_\lambda$	35° 30′ / 24° 30′	34° / 26°	32° / 28°
1,6645	70° 43′,07	58° 47′,50	55° 24′,71	53° 16′,93
1,6713	71 16,85	59 55,87	56 16,33	54 1,20
1,6771	71 45,35	60 56,67	57 0,81	54 39,16
1,6929	72 48,07	63 41,80	58 53,93	56 14,33
1,7071	74 17,00	67 30,5	61 6,82	58 2,43

*

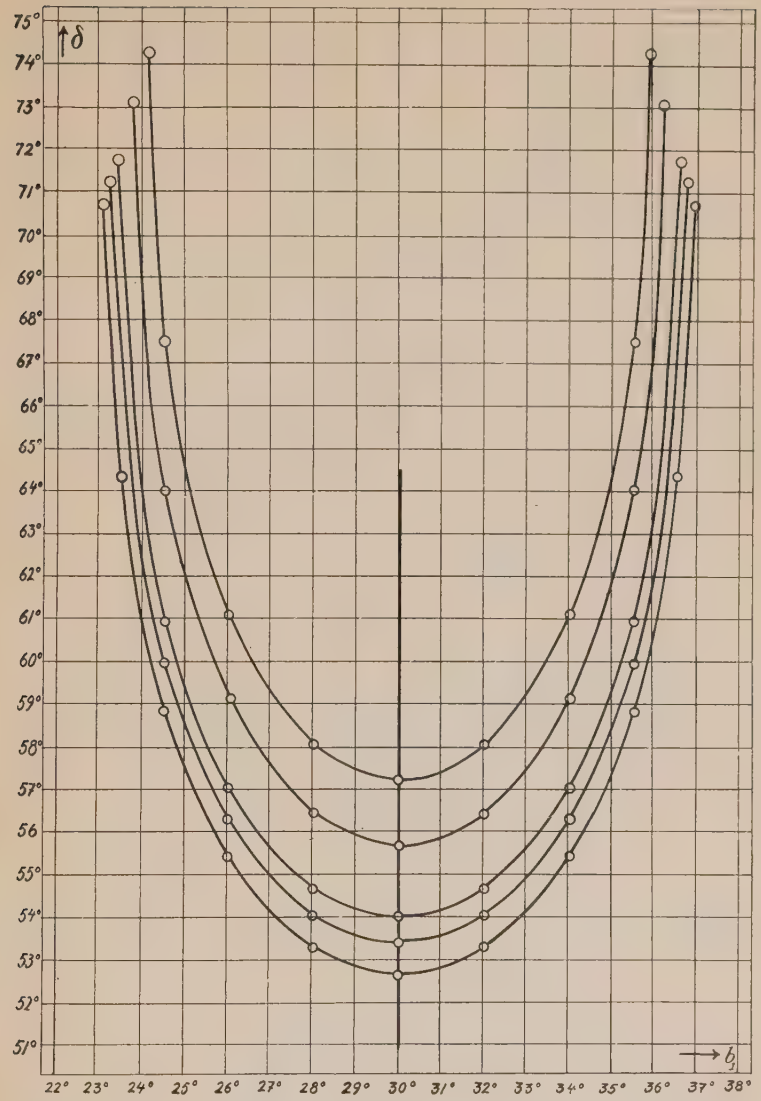

δ
75°
74°
73°
72°
71°
70°
69°
68°
67°
66°
65°
64°
63°
62°
61°
60°
59°
58°
57°
56
55°
54°
53°
52°
51°
22° 23° 24° 25° 26° 27° 28° 29° 30° 31° 32° 33° 34° 35° 36° 37° 38°
b

Diagram 2.

Tänker man sig prismor slipade av samma slags glas men med olika brytande vinklar, är det av intresse att undersöka, hur φ inverkar på $\delta^{\lambda}_{\min}$ och undre gränsen för infallsvinkeln i_{1gr}.

Ur ekv. (12) erhålles

$$\delta^{\lambda}_{\min} = 2 \arcsin (n_\lambda \sin \tfrac{1}{2}\varphi) - \varphi .$$

Övre gränsen för φ betingas av att

$$\varphi_{gr} = 2 \arcsin \left(\frac{1}{n_\lambda}\right) = 2 g_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

och gränsvärdet för $\delta^{\lambda}_{\min}$ blir $= 180° - 2g_\lambda$.

För de 5 här angivna våglängderna upptager tabell 1 värdena på g_λ. För några valda φ-värden har $\delta^{\lambda}_{\min}$ beräknats enligt formeln (16). Värdena, som finnas i tabell 3, äro inprickade i diagram 3 endast för K_α och H_γ.

Tabell 3.

φ	$\delta^{\lambda}_{\min}$				
	$n = 1{,}6645$	1,6713	1,6771	1,6929	1,7071
10°	6°,613	6°,652	6°,811	6°,971	7°,113
20	13,600	13,642	13,862	14,190	14,487
30	21,037	21,261	21,451	21,973	22,446
40	29,400	29,728	30,001	30,761	31,635
50	39,408	39,874	40,269	41,361	42,350
60	52,660	53,370	53,970	55,654	57,200
70	72,625	76,961	78,275	82,333	86,556
φ_{gr}	106,146	106,500	106,793	107,507	108,283

Genom derivering av formeln (12) med avseende på φ erhålles:

$$\frac{d\delta^{\lambda}_{\min}}{d\varphi} = n \quad \text{för} \quad \varphi = 0.$$

$$\frac{d\delta^{\lambda}_{\min}}{d\varphi} = \infty \quad \text{för} \quad \varphi = 2g_\lambda .$$

Gränsen för infallsvinkeln, i_{1gr}, bestämmes av formeln (14) och blir för en given våglängd beroende av φ. I första

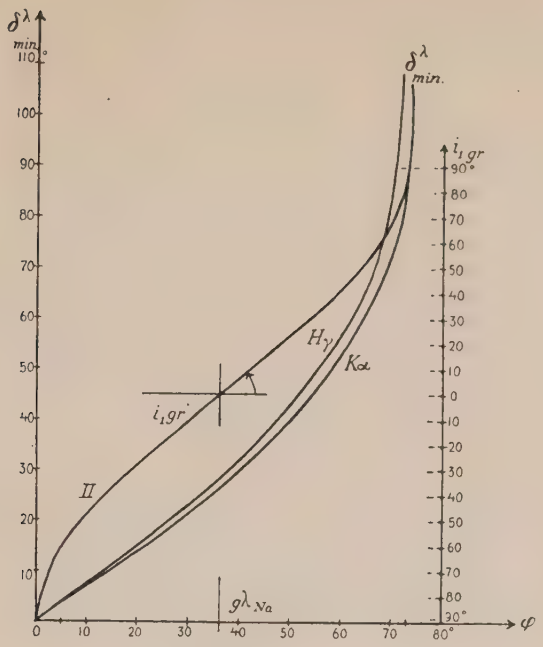


Diagram 3.

avdelningen av tabell 4 finnas gränsvärdena, i_{1gr}, för några olika φ-värden beräknade för *D*-linjens brytningsindex.

Deriveras formeln (14) med avseende på φ, erhålles

$$\frac{di_{1gr}}{d\varphi} = \frac{n \cos(\varphi - g_\lambda)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\varphi - g_\lambda)}}.$$

För $\varphi = g_\lambda$ antager $\frac{di_{1gr}}{d\varphi}$ värdet n.

Vidare bliver

$$\frac{d^2 i_{1gr}}{d\varphi^2} = \frac{n \sin(\varphi - g_\lambda)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\varphi - g_\lambda)}} \left[\left(\frac{di_{1gr}}{d\varphi} \right)^2 - 1 \right],$$

som för $\varphi = g_\lambda$ reduceras till 0, varför kurvan har en inflexionspunkt för $\varphi = g_\lambda$.

Förloppet av sambandet mellan i_{1gr} och φ framgår av diagram 3, kurvan II.

Tabell 4.

$(b_1=g_\lambda)$ φ	i_{1gr}	$\varphi - b_2$	i_1
$2g_\lambda°$	90°	$g_\lambda°$	90°
70	67 23′,25	35	74 8′,50
60	41 45,37	30	56 59,25
50	22 51,93	25	45 8,15
40	5 42,15	20	35 0,12
g_λ	0	15	25 43,67
30	— 11 7,20	10	16 55,90
20	— 28 38,08	5	8 24,30
10	— 48 40,75	0	0
5	— 61 30,30		
0	— 90		

Slutligen har sambandet mellan i_1 och δ undersökts. Det har beräknats för *D*-linjen ur grundekvationerna (1)—(4) med φ som parameter. Tabell 5 upptar några av de värden, som ligga till grund för diagram 4.

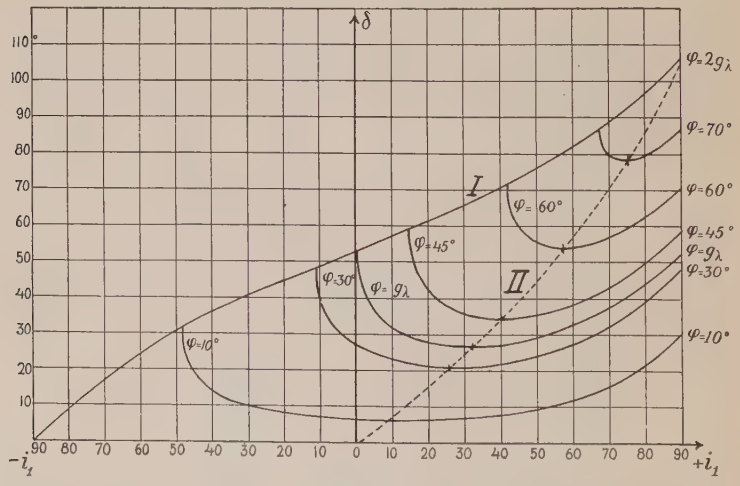


Diagram 4.

Tabell 5.

δ för D-linjen.

i_1	$\varphi=10°$	$\varphi=30°$	$\varphi=g_\lambda$	$\varphi=45$	$\varphi=60$	$\varphi=70$	$\varphi=2g_\lambda$
90	31° 19′,45	48° 52′,80	53° 23′,77	59° 10′,50	71° 45′,23	87° 22′,91	106° 47′,53
80	22 44,75	39 57,30	44 27,60	50 15,70	63 4,41	79 48,50	
70	16 49,57	33 9,97	37 38,08	43 31,65	57 8,85	79 42,33	
60	12 52,83	28 10,30	32 40,13	38 46,50	54 10,15		
50	10 18,50	24 44,05	29 20,15	35 52,83	55 22,00		
40	8 39,10	22 34,85	27 27,07	34 51,00	59 26,90		
30	7 37,10	21 33,25	26 58,73	36 6,70			
20	7 2,12	21 38,45	28 10,70	41 11,40			
10	6 48,84	23 7,70	32 10,90				
0	6 55,87	26 59,13	53 23,77				
— 10	7 25,80	39 52,31					
— 20	8 27,40						
— 30	10 23,20						
— 40	14 25,27						
i_{1gr}	−48 40,57	−11 7,22	0 0,0	+14 10,48	41 45,23	67 22,92	90 0,0
$\delta_{\min}$	6 48 61	21 27,07	26 57,20	34 51,07	53 58,23	78 16,00	106 47,53
$\delta_{gr}-\delta_{\min}$	24 30,83	27 25,70	26 26,57	24 19,42	17 47,00	9 6,92	0 0,0

I diagram 4 är kurvan I gränskurvan för δ_{gr}, kurvan II orten för $\delta_{\min}$. För $\varphi < g_\lambda$ får i_1 även vara negativ. Vinklarnas tecken räknas såsom angivet är i fig. 1.

För δ_{gr} och $\delta_{\min}$ gälla uttrycken

$$\delta_{gr}=90+i_{1\,gr}-\varphi\,;\quad \delta_{\min}=2i_0-\varphi\,,$$

där

$$\sin i_{1\,gr}=n_\lambda \sin(\varphi-g_\lambda) \text{ och } \sin i_0=n_\lambda \sin\frac{\varphi}{2}\,.$$

Funktionen $(\delta_{gr} - \delta_{\min})$ kommer att variera med φ. Sättes fördenskull derivatan med avseende på φ lika med noll, erhålles:

$$\frac{d}{d\varphi}(\delta_{gr} - \delta_{\min}) = \frac{di_{1\,gr}}{d\varphi} - \frac{2di_0}{d\varphi} = 0,$$

vilket innebär, att

$$\frac{\cos(\varphi - g_\lambda)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\varphi - g_\lambda)}} = \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}}.$$

Löses ekvationen med avseende på φ. erhålles:

$$\cos(\varphi - g_\lambda) = \cos \tfrac{1}{2}\varphi; \quad \varphi - g_\lambda = \pm \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\varphi_1 = 2g_\lambda$$

$$\varphi_2 = \tfrac{2}{3}g_\lambda.$$

Lösningen $2g_\lambda$ motsvarar gränsen för φ, för vilken $\frac{di_{1\,gr}}{d\varphi}$ och $\frac{di_0}{d\varphi}$ båda bliva oändliga.

För $\frac{2}{3}g_\lambda$ har funktionen $(\delta_{gr} - \delta_{\min})$ ett maximum. Hur δ_{gr}, $\delta_{\min}$, $(\delta_{gr} - \delta_{\min})$ varierar med φ framgår av diagram 5. Några av de för uppritning av kurvorna beräknade värdena äro upptagna i tabell 5.

Hur infallsvinkeln i_1 får variera, under förutsättning att det villkoret fasthålles, som bestämmer, att strålknippet släppes igenom prismat, på sätt som i fig. 1 åsyftas, visas av diagram 6.

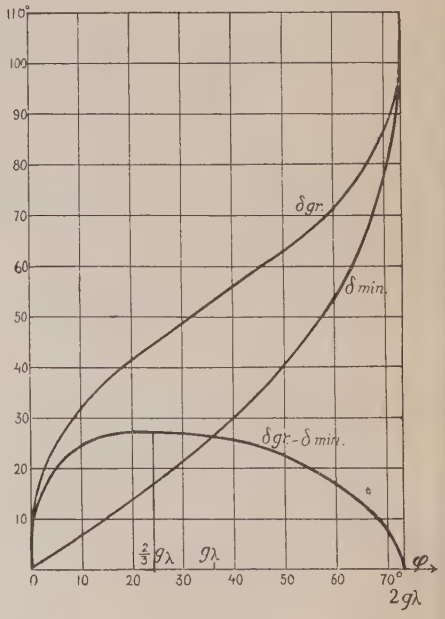


Diagram 5.

I ekvationen

$$\sin i_1 = n_\lambda \sin b_1 = n_\lambda \sin (\varphi - b_2),$$

få vinklarna φ och b_2 variera mellan gränserna

$$0 < \varphi < 2g_\lambda$$

$$\varphi - g_\lambda < b_2 < g_\lambda .$$

De för uppritning av diagram 6 beräknade värdena finnas upptagna i tabell 4. Brytande vinkeln φ är parameter. För varje kurvindivid blir $\left(\frac{di_1}{db_2}\right) = -n$ för

$$b_2 = \varphi \quad \text{och} \quad \frac{d^2 i_1}{db_2^2} = 0$$

i samma punkt.

Kurvan II är gränskurvan för $\varphi = 0$ och kurvan I är orten för de infallsvinklar, som motsvara minimideviation.

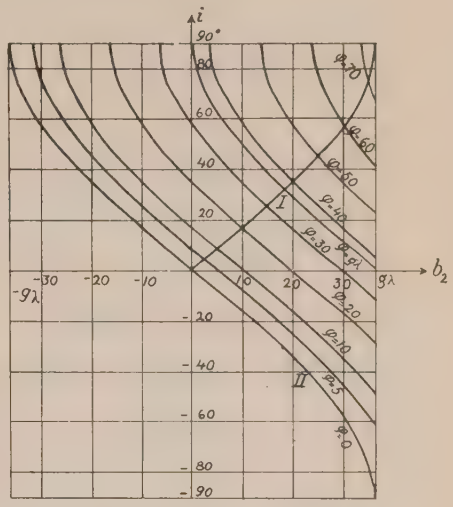


Diagram 6.

Det faller utanför ramen av dessa rader att ingå på de förhållanden, som uppstå, om strålknippet efter totalreflexion inne i prismat lämnar detsamma.

*

Anm. Som mått på noggrannheten av de beräknade n-värdena betraktas det maximala felet, som lätt erhålles genom nedanstående felberäkning enligt brukligt tillvägagångssätt.

Genom logaritmering och differentiering av formeln (12) erhålles:

$$^e\log n = {}^e\log \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta_{\min}) - {}^e\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\frac{dn}{n} = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta_{\min})(d\varphi + d\delta_{\min}) - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi \cdot d\varphi .$$

$$\frac{dn}{n} = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta_{\min}))\,d\varphi + \\ +\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta_{\min})\,d\delta_{\min}.$$

Då $\frac{1}{2}\varphi < \frac{1}{2}(\varphi+\delta_{\min})$ och därför $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi > \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\varphi+\delta_{\min})$, är koefficienten för $d\varphi$ negativ; dn når därför sitt maximum för $d\varphi < 0$ och $d\delta_{\min} > 0$.

$$|dn|_{\max} = \frac{n}{2}[(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta_{\min}))|d\varphi| + \\ +\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta_{\min})|d\delta_{\min}|].$$

Antages $|d\varphi| = |d\delta_{\min}|$, reduceras uttrycket till

$$|dn|_{\max} = \frac{n}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi \cdot |d\varphi|.$$

Uppskattas felet $|d\varphi|$ till 1', erhålles:

$$|dn|_{\max} = \frac{n}{2}\operatorname{cotg} 30^\circ \cdot \frac{2\pi}{360}\cdot\frac{1}{60} = n \cdot 0{,}000084.$$

För H_λ blir $|dn|_{\max} = 0{,}000143$. Den fjärde decimalen i värdena på n_λ är osäker på en enhet, och värdet på n_λ kan variera inom ett område av 0,00028.

De brytningsindices, som uppmätts hos prismat, äro tillräckliga för att karakterisera glassortens optiska egenskaper. Differenserna mellan brytningsindices äro mått på dispersionen eller färgspridningen i spektrum, och då intervallet C till F omfattar den mellersta ljusstarka delen av spektrum, så karakteriseras de olika glassorterna genom sina värden på den s. k. medeldispersionen $(n_F - n_C)$.

Längden av det spektrum, som den ifrågavarande glas sorten giver, representeras av den totala dispersionen, som lämpligen kan uttryckas genom differensen $(n_G - n_{A'})$. Dispersionsvärdena för de tre intervallen $A-D$, $D-F$, $F-G$, nämligen $(n_D - n_{A'})$, $(n_F - n)$, $(n_{G'} - n_F)$ hava stor betydelse för problemet om akromatisering av prismor och linskombinationer. De benämnas den partiella dispersionen eller gången av dispersionen. Dessutom tillkommer ett viktigt

begrepp: den relativa dispersionen, $\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$, vars reciproka värde brukar betecknas med ν.

För den undersökta glassorten har man således att uppgiva:[1]

$$n_D = 1{,}6771 \qquad n_D - n_{A'} = 0{,}0126$$
$$n_F - n_C = 0{,}0216 \qquad n_F - n_D = 0{,}0158$$
$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = 31{,}35 \qquad n_{G'} - n_F = 0{,}0142.$$

Anm. Att inställningsskärpan för $\delta_{\min}$ varierar med brytande vinkeln φ synes av diagram 4. Som mått på densamma betraktas krökningen k hos (δ, i_1)-kurvorna i resp. minimipunkter. För k gäller uttrycket $k = \frac{q}{[1+p^2]^{3/2}}$, där $p = \frac{d\delta}{di_1}$ och $q = \frac{d^2\delta}{di_1^2}$. Av grundekvationerna (1)—(4) erhålles i minimipunkterna $\frac{d\delta}{di_1} = 0$, varför $k = \frac{d^2\delta}{di_1^2} = \frac{d^2 i_2}{di_1^2}$. Värdet på den senare andra derivatan beräknas ur ekv.

$$\cos i_2 \frac{d^2 i_2}{di_1^2} - \sin i_2 \left(\frac{di_2}{di_1}\right)^2 = -n\cos(\varphi - b_1)\frac{d^2 b_1}{di_1^2} - n\sin(\varphi - b_1)\left(\frac{db_1}{di_1}\right)^2,$$

som erhålles genom grundekvationernas derivering.

Med hjälp av minimideviationsvillkoret reduceras uttrycket till

$$k = \frac{2(n^2-1)}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 - n^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}} \quad . \quad . \quad (17)$$

Enligt denna formel hava värden beräknats på krökningen i minimipunkterna för några olika φ- och n-värden.

φ	70°	60°	45°	30°	10°
$K\alpha$	6,1121	2,5583	1,2401	0,6539	0,1818
D	6,7611	2,6447	1,2637	0,6656	0,1919
H_γ	9,4340	2,8693	1,3279	0,6935	0,1992

[1] Utförligare är detta behandlat t. ex. av:
Chwolson, ib., S. 408.
Müller-Pouillet, ib., S. 197.

Rörliga modeller av trefasgenerator och -motor.

Av JOHN LUNDBERG.

I denna tidskrift för juni 1919 har undertecknad beskrivit förfärdigandet av några väggtavlor med rörliga delar, föreställande maskiner och apparater, vilka genomgås i skolan, och vilka endast med svårighet låta sig åskådliggöras medelst vanliga planscher. I sagda uppsats har jag också framhållit, att dylika tavlor med rörliga delar torde kunna förfärdigas även för ett stort antal andra apparater. Som jag under det gångna läsåret iordningställt ett par dylika för att klargöra principen för trefasgeneratorn och -motorn, vilka modeller visat sig vara av rätt stor nytta, skall jag här nedan beskriva tillverkningen av desamma, då eventuellt andra fysiklärare skulle finna förfärdigandet av sådana löna mödan. Vad beträffar de allmänna synpunkterna på användningen av tavlor eller modeller med rörliga delar, ävensom angående själva manövreringen av arbetsmaterialet vid förfärdigande av pappmodeller, ber jag att få hänvisa till min ovan nämnda uppsats.

A. Generatorn. Av tjockt papp utskäres en cirkelring *B* (fig. 1, II). Av matt, svart papper utskäres den figur, som föreställer maskinens stator (se även detaljritningen). Denna har formen av en cirkelring, vars yttre diameter är lika med *B*:*s*, och vars inre begränsning (2) skall falla ungefär mittemellan yttre och inre cirkeln i *B* (se fig. 1, II, där detta papper tänkes fastklistrat på ringen). Från denna inre begränsningscirkel utgå »magnetpolerna», vilka inåt

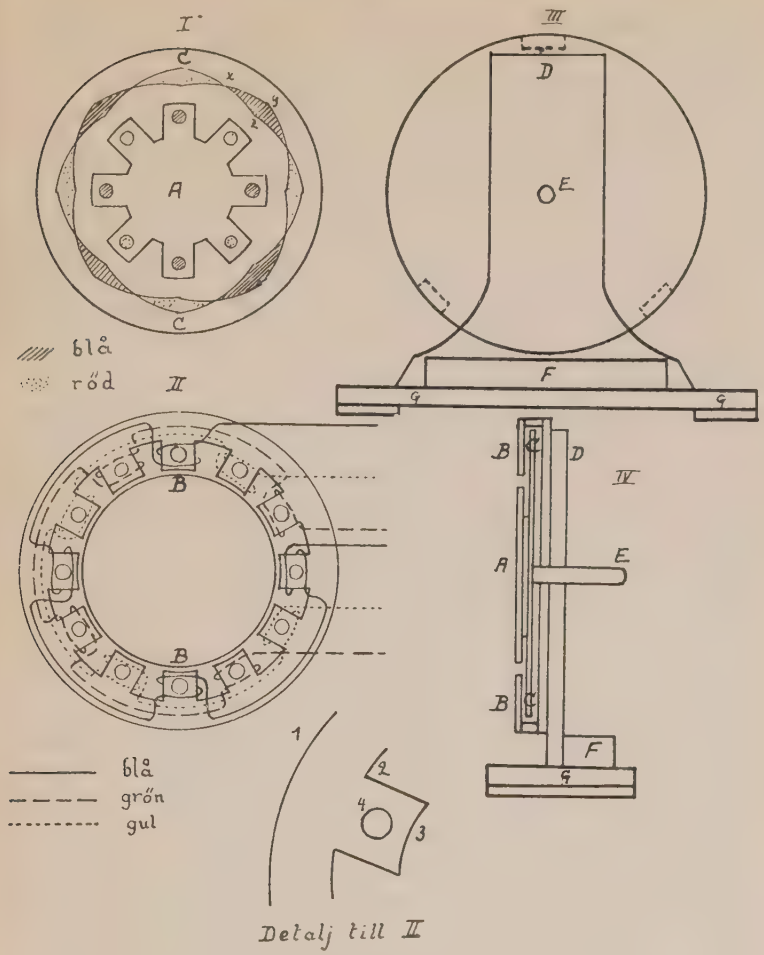


Fig. 1.

begränsas av en cirkel (3) med ett par millimeter större radie än *B:s* inre cirkel. Jag har valt att göra modellen i möjligaste mån lik teckningen i den av eleverna använda läroboken (Molls Fysik, del III, 8:e uppl., fig. 150) och fördenskull givit den 12 poler. Naturligtvis kan man ge den vilket, med tre delbart, antal poler, man önskar,

och apparaten blir givetvis mera överskådlig, om man tar ett lägre tal än 12.

I den tjocka pappringen *B* utskäras nu de hål, vilka svara mot den lilla cirkeln 4 på detaljritningen. Dessa cirklar utskäras däremot *ännu icke* i det svarta papperet. Pappringen *B* överklädes på framsidan med vitt papper, vilket därefter bortskäres över hålen 4. Sedan detta är gjort, påklistras den svarta statorsilhuetten, så att dess yttre kant (1) noga sammanfaller med pappringens, varvid polernas inre kanter (3) överallt komma att ligga ett par millimeter innanför den nu vita pappringens inre kant. Polerna måste därvid falla noga mittöver de utskurna hålen 4. Det svarta papperet genomstickes mittöver dessa hål, och uppklippes intill dessas omkretsar i taggar, vilka vikas under pappet, där de fastklistras. Slutligen klistrar man olifantpapper på pappringens baksida, så att denna överallt är klädd, då pappet eljest slår sig. Man ser nu statorringen med de inskjutande magnetpolerna svart på vit bakgrund, medan i varje pols mitt hålet 4 är helt uttaget.

Härnäst i ordningen följer statorns lindning med ledningstråd. Till tråd användes olifantpapper, vilket utklippes och påklistras som figuren visar. Remsorna få ej föras så, att de gå över hålen i magnetpolerna, utan dessa skola förbli fria. — Statorn är nu färdig och har det utseende, som fig. 1, II visar.

Rotorn göres av samma sorts kraftig papp som statorn och utskäres som fig. 1, I *A* visar. Antalet poler på den skall som bekant förhålla sig till antalet poler på statorn som 2 till 3. Den överklädes helt med matt, svart papper. Mitt på varje pol klistras en cirkel, ungefär av samma storlek som cirklarna 4, av färgat papper, varannan blå (nordpol), varannan röd (sydpol).

Nu kommer turen till »magnetfältet», *C*. Detta består av ett cirkelformigt stycke tjock, vit kartong, vars radie är endast obetydligt större än radien i cirkeln 2 på statorn. På detta utritas först en cirkel, så stor, att den kommer

att gå genom medelpunkterna av alla cirklarna 4, när *C*:*s* medelpunkt bringas att sammanfalla med *B*:*s*. Därefter klistras omväxlande röda och blå pappersstycken längs denna cirkel. Dessa styckens form och det sätt, varpå de följa varandra, framgår av fig. 1, I. Det är härvid ytterst viktigt, att alla beröringspunkterna mellan blå och röda stycken (x) falla precis på den nyssnämnda cirkeln. Bredden yz skall vara noga lika med diametern i hålen 4 och ligga så, att sagda cirkel går mittemellan y och z. Även en ganska liten vårdslöshet i dessa stycken försämrar den färdiga modellen högst betydligt. De färgade pappersstyckena böra i övrigt vara tillskurna så, att bredden mittemellan x och yz är lika med halva yz, och överhuvudtaget bredden proportionell mot avståndet från närmaste punkt x, längs cirkeln räknat.

Sedan »magnetfältet» är färdigt, fastklistrar man *A* på *C*, med ett stycke tjockt papp, överallt mindre än *A*:*s* inre diameter, som mellanlägg. *A*:*s* och *C*:*s* medelpunkter måste därvid bringas att ytterst noga sammanfalla.

Nu återstår monteringen. Denna kan göras på en stor, med vitt papper överdragen, pappskiva, varigenom man får en väggtavla. Jag har emellertid föredragit att göra modellen fristående och fördenskull gått tillväga på följande sätt. En cirkelformig skiva av tjockt papp och med diameter lika med ytterdiametern i *B* utskäres (ännu bättre är att utsåga denna skiva med lövsåg ur kryssfaner). Vid ytterkanten av denna fastlimmas tre eller flera c:a 2 cm breda och en halv cm tjocka träbitar (se fig. 1, III, som visar modellens baksida). Därefter utsågas ur ett rätt tjockt bräde ett stycke av form, som fig. 1, III *D* visar. Den nyss nämnda cirkeln skruvas stadigt fast vid denna brädbit med de små trästyckena vända från den. Genom medelpunkten av cirkelskivan och ut genom brädet borras ett hål. Dettas diameter får rätta sig efter diametern hos den stång, *E*, man tänker ta till axel (en bit av ett gammalt kvastskaft eller dylikt) och bör lämpligen vara 3 à 4 cm. Axelstången avskäres till c:a 1 dm:s längd, varefter den

med ena ändan stadigt fästes vid skivan *C*:s medelpunkt medelst lim och ett par skruvar. Axeln *E* stickes därefter genom hålet i *D*, så att *C* kommer att ligga framför den vid *D* fastsatta pappskivan. Slutligen fastsättes — helst med skruvar — *B* vid de små trästyckena på den bakre pappskivans kant, så att ytterkanterna av *B* överallt komma alldeles framför sagda kant. Fig. 1, IV visar, hur det hela nu tar sig ut i en lodrät tvärgenomskärning genom axeln.

Brädet *D* fästes nu vid fotstycket *G* medelst klotsen *F* som fig. 1, III och IV visa. Den del av *D*, som blir synlig på apparatens framsida, svartmålas.

Generatormodellen är härmed färdig. Fotografien, fig. 3, visar den till vänster på bilden.

Vrider man nu, genom att bakifrån gripa tag i axeln *E*, rotorn runt, komma de färgade styckena på skivan *C* att omväxlande fylla eller lämna fria hålen i statorn *B*. Att ett hål är fyllt av blått betyder, att polen i fråga är mättad med nordmagnetism. Vrides rotorn, ser man, hur magnetiseringen blir svagare, slutligen noll, slår över i sydmagnetism (rött), som därefter blir starkare och starkare tills polen åter är mättad o. s. v. Kringvrides rotorn ett fjärdedels varv, genomlöper varje strömkurva en hel våglängd. Lämpligen går man vid demonstrationen tillväga så, att man först inställer rotorn som fig. 3 visar (skivan *C* i fig. 1 flyttad rakt ner och utan vridning satt in under skivan *B*) och låter en av eleverna i ett rutnät på svarta tavlan med färgade kritor utpricka strömstyrkorna i de tre ledningarna under förutsättning, att rotorn vrider sig t. ex. medsols. Man får då punkten 12 i Molls fig. 152. Därefter vrider man rotorn 7°,5 och får på samma sätt punkten 13 o. s. v.

B. Motorn. Efter den ovan givna utförliga beskrivningen av generatorn, torde ej många ord behöva offras på förfärdigandet av motormodellen, då den senare uppbygges alldeles analogt med den förra. Fig. 2 visar statorn och rotorn. Kopparlamellerna på den senare äro markerade med röda fyrkanter längs omkretsen av den svarta cirkelskivan *A*.

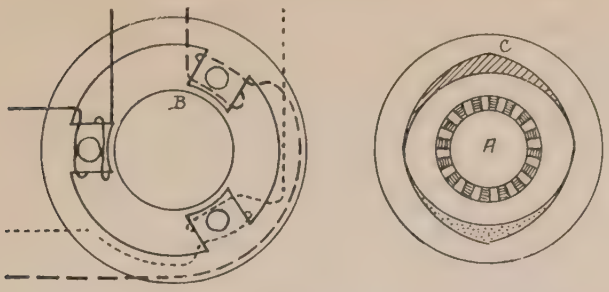


Fig. 2.

Denna är fästad på den vita kartongskivan *C* med »magnetfältet» på alldeles samma sätt, varpå motsvarande delar i generatormodellen äro fastsatta vid varandra. Statorn *B* har jag gjort så enkel som möjligt, alltså endast 3-polig. I övrigt är motorns stator alldeles likadan som generatorns. Hopsättningen är lika med den i fig. 1, III och IV visade. Fig. 3 visar till höger den färdiga motorn bredvid generatorn.

Om man nu på sätt, som ovan beskrivits, vrider generatorns rotor runt och tänker sig dennas ledningar kopplade till motorns (samt i andra ändarna t. ex. stjärnkopp-

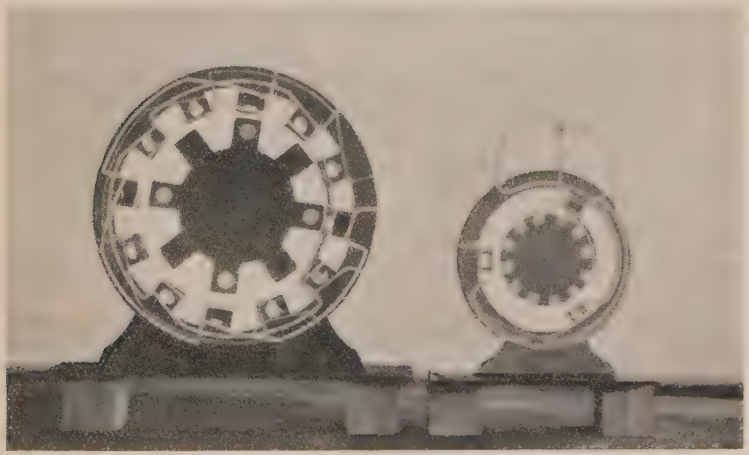


Fig. 3.

lade — ledningarna utanför modellerna kunna framställas genom tjockt garn i samma färg som motsvarande pappersslindningar), så ser man av det successivt uppritade diagrammet över strömstyrkorna, hur polerna i motorns stator efter hand måste ändra sin magnetisering, och om exempelvis en elev kringvrider rotorn i generatorn, kan en annan för varje gång ställa in magnetfältet i motorn i motsvarande ställning, varvid omedelbart framgår, att även detta fält kommer att rotera (i detta fall 4 varv, medan generatormagneterna rotera ett).

Som härav synes, blir framställningen av själva magnetfältets rotation i princip likartad med den av Grimsehl använda, men man har här den fördelen att ej behöva använda ett flertal — Grimsehl har 7 — olika figurer, utan får fram förändringen kontinuerligt på en och samma figur genom vridningen av skivan *C*.

Slutligen vill jag endast påpeka, att modellerna, särskilt den av generatorn, böra göras så stora papparken tillåta, emedan den detalj, som är det väsentliga, nämligen hålen i statorpolerna och de i dessa successivt framträdande blå och röda fälten endast på detta sätt kunna fås så stora, att magnetfältets växlingar bli fullt tydliga även från de bortersta platserna i en stor lärosal. På de av mig förfärdigade modellerna är yttre diametern hos generatorn 52 cm och hos motorn 34 cm.

Göteborg, Högre reallärоverket, augusti 1923.

En apparat för demonstration av osmotiskt tryck.

Av OLOF HAMMARSTEN.

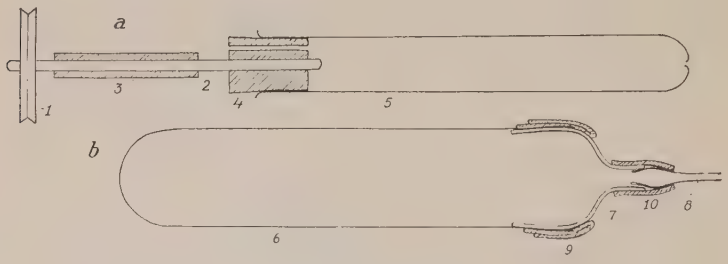
Svårigheten att erhålla lämpliga membraner för demonstration av osmotiskt tryck kan på ett mycket tillfredsställande sätt lösas genom användandet av kollodiumhinnor. Sådana kunna ju framställas på många sätt, men de för demonstrationsändamål lämpligaste torde erhållas enligt en av S. P. L. Sörensen angiven metod (Meddelelser fra Carlsberg laboratorium Bd I—IV, 1915—17, sid. 28).

Kollodium[1] gjutes i en jämn ström på utsidan av ett roterande provrör så att hela ytan av detsamma täckes. I rörets botten är ett 1—3 mm grovt hål. För att kollodiumhylsan skall få tillräckligt stor volym bör rörets diameter vara ungefär 3,5 cm. Röret roteras av en motor med en hastighet av ungefär 60 varv i min. Det hålles under pågjutningen i cirka 30° vinkel mot horisontalplanet och bringas, sedan överskottet på kollodium fått rinna av under 15—30 sek, i absolut horisontellt läge och får rotera i denna ställning 8 min. Därpå förnyas pågjutningen i snedläge, varefter rotation i horisontalläge 8 min. Inalles böra 3—4 sådana pågjutningar göras. Efter sista pågjutningen får röret rotera cirka 1 tim. Därpå skäres kollodiumskiktet av i övre ändan av röret, och detta sättes i vatten till nästa dag. Kollodiumskiktet kan då under gnidning med fingrarna och lätt vridning lossas från röret och dragas av som en sammanhängande hylsa. Denna monteras sedan på en glastratt,[2] vid vilken den fastklämmes med en kautschukring. (Jämför fig.)

[1] Framställes av Skånska bomullskrut fabr. aktb., Landskrona, om absolut alkohol insändes med begäran om beredning enligt följande rec.: 3 del. cellulosanitrat + 70 del. abs. alk. + 30 del. vattenfri eter.

[2] Kan erhållas från R. Grave, Malmskillnadsgatan 48 C, Stockholm.

Hylsan fylles lämpligen med mättad sockerlösning, som färgats med metylenblått. I ett stigrör av 3 mm diameter stiger sockerlösningen under 45 min. 5—6 dm. Användes ett kapillärrör, stiger lösningen under samma tid flera meter. Bakom stigröret bör man anbringa en skala ritad på vitt papper. Efter försökets slut kan hylsan sättas ned i en burk med lika stark sockerlösning och förvaras där till nästa gång. För längre tids förvaring sköljes hylsan och nedlägges i en burk med vatten, tillsatt med några cm^3 toluol. Hylsorna äro mycket starka, och samma hylsa kan användas flera år i följd.



Figurförklaring.

a Apparat för tillverkning av kollodiumhylsor, *b* hylsan i färdigmonterat skick. 1 trissa av kork eller trä, 2 glasstav, 3 glas- eller metallrör, 4 kork med luftkanal, 5 provrör med hål i botten, 6 kollodiumhylsa, 7 glastratt, 8 stigrör, 9 och 10 gummislang.

Hylsorna lämpa sig även utmärkt för dialys, särskilt om torkningstiden utsträckes till 2 tim. efter sista pågjutningen. Hylsorna bliva då absolut ogenomträngliga för äggvita men genomsläppa lätt de flesta salter.

Ett enklare förfaringssätt är att använda vanligt kollodium från ett apotek och att rotera röret mellan fingrarna. Man värmer botten på ett provrör och sticker hastigt ett hål i denna med en glödande nål. Sedan hylsan lossats, monteras den på en kautschukpropp, vid vilken den stadigt fastbindes med ett snöre. Även på detta sätt erhålles en fullt användbar apparat. Hylsorna bliva dock lätt ojämna och ej fullt så starka.

Apparat för sträckningselasticitet.

Av G. STARCK.

Förebilden till den apparat, som beskrives i det följande utgjordes av en cirka 250 cm lång träribba, 3×3 cm i tvärsnitt, som med en tving fastsattes vid lektionsbordet. Vid den ena ändan fastgjordes den metalltråd, vars elastiska egenskaper skulle undersökas, tråden låg längs träribbans översida, löpte i den andra änden över en trissa och kunde där belastas. För att demonstrera trådens förlängning vid belastning voro på lämpliga ställen mellan tråden och ribban, vinkelrätt mot den förra, cylindriska stavar av trä eller metall, cirka 1 mm i diameter, lagda, vilka vid trådens sträckning rullade framåt ett motsvarande stycke. Deras vridning gjordes synlig medelst vid rullarna fästade lätta visare av papper e. d., som rörde sig framför små gradskivor av papper. Anordningen var enkel, men tyvärr också behäftad med brister: de små axlarna utförde i regeln okontrollerbara rörelser, varför deras ställning oupphörligt måste justeras; vid stora utslag från vertikalläget kunde visarens vridningsmoment få samma eller större värde än friktionens mellan tråd och axel, varigenom resultaten förvanskades. Ett fel, vars betydelse i jämförelse härmed är tämligen obetydligt, men dock må framhållas, är att vid axlarnas vridning samtidigt en rullning framåt äger rum. Detta medför, att förlängningen är proportionell mot 2 ggr axelns vridningsvinkel, vilket i och för sig icke är något fel, men därjämte att axeln lämnar gradskivans medelpunkt och den avlästa cirkelbågen är större än den verkliga vridningsvinkeln.

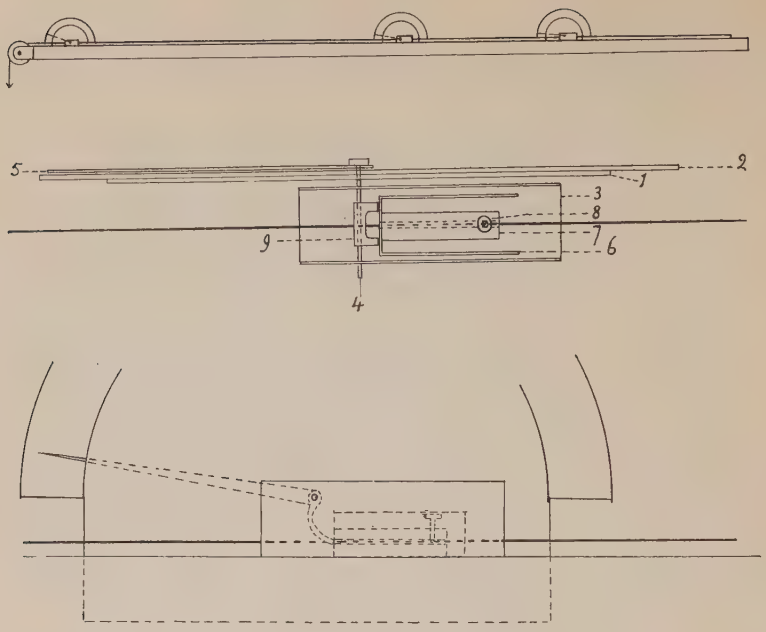


Fig. 1—3.

Den anordning, som visas av fig. 1—3, avser att göra apparaten mindre nyckfull och att möjliggöra något så när kvantitativa undersökningar över sträckningselasticiteten. På trästaven äro medelst metallbleck (1) fastsatta 3 celluloidgradskivor (2) med 9 cm radie, vilkas avstånd från den undersökta trådens fästpunkt förhålla sig som 1 : 2 : 4. Celluloidskivorna äro genomskinliga och visarnas rörelser synliga för klassen på samma gång som avläsbara från motsatta sidan. Vid varje gradskiva är fästat ett uppåt öppet, vinkelböjt mässingsbleck (3), som tjänar dels till lager för en smal axel (4), på vilken visaren (5) är fästad, dels till gejder för den anordning, medelst vilken tråden påverkar visaren. Denna utgöres av ett andra vinkelböjt mässingsbleck (6), vid vars främre yta är fastlödd en parallellepipedisk mässingsklots (7) med ett längsgående hål och en vertikal skruv (8). Den undersökta tråden drages genom

hålet och fastsättes med skruven. Med sin främre yta stöder (6) mot en gaffelformad, krökt hävarm (9), fästad på axeln. Då tråden sträckes, vrider sig axeln, medan gaffelns spetsar glida mot pannan av blecket (6). Sträckningen är proportionell mot sinus för utslagsvinkeln; d. v. s., att för små vinklar den sistnämnda är ett mått på förlängningen.

Skall proportionalitet mellan sträckning och trådens längd demonstreras, bör sammanbindningslinjen mellan axeln och gaffelns ändpunkt i utgångsläget överallt bilda ungefär samma vinkel med vertikalen.

Denna apparat har med gott resultat under ett par år använts vid härvarande Norra reallärоverk. Ett lämpligt material för sträckningsförsök är koppar med låg elasticitetsgräns och brottgräns. En tråd med 0,40 mm diameter har en elasticitetsgräns $\sim$ 1 000 g, motsvarande en utslagsvinkel för en tråd av 220 cm längd $\sim 8°$. Före försöket bör tråden sträckas under några timmar av en lämplig belastning (500 g), så att den blir fullt uträtad. Med apparaten har visats: proportionalitet mellan längd och sträckning, mellan sträckning och belastningsökning; elasticitetsgränsen har bestämts och förhållandena vid starka påkänningar uppvisats.

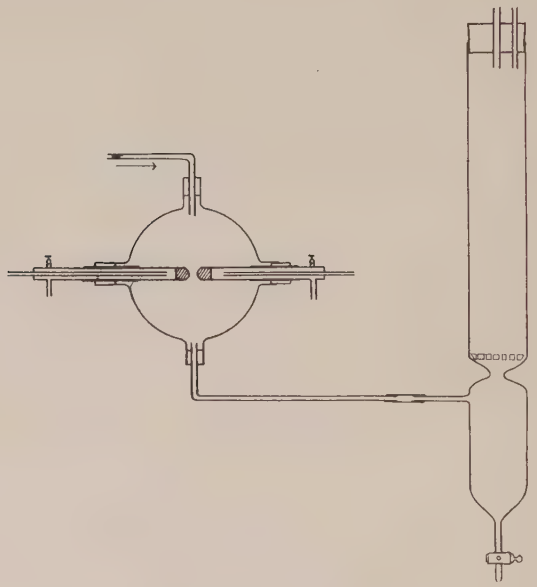
Försöket kompletteras lämpligen av en liten tabell över några få viktiga materials (metallers och byggnadsmaterials) elastiska konstanter.

Kemiska notiser.

Av G. STARCK.

V.

För demonstration av salpetersyreframställning ur luft har förf. sammanställt den apparat, som här återgives och som lämnat goda resultat.



I den med 4 tuber försedda kolven om 1—1½ lit. rymd inledes torr luft uppifrån. De horisontella elektroderna äro mässingsrör, cirka 12 mm tjocka, försedda med hårdlödda, massiva kopparspetsar. Ett smalare, centriskt mässingsrör tillför kylvatten, som avledes vid sidan. Koppar är det bästa

elektrodmaterialet, ävgjort överlägset kol, som förbrinner, eller mässing, som likaledes förbrinner och ger en aska, som avsätter sig på kolvens väggar och hastigt gör dem ogenomskinliga. För att bekvämt kunna skjutas fram och dragas tillbaka äro elektroderna insatta i passande mässingsrör, fastgjorda i korkar. Detta medför, att apparaten icke är fullt lufttät, varför den luftström, som genomledes, icke får ha något tryck att övervinna. Från kolven ledes gaserna till botten av ett absorptionsrör, i sin övre del fyllt med glaspärlor, över vilka vatten från en skiljetratt får droppa — en modell av kvävefabrikernas absorptionstorn.

När ljusbågen brunnit några få minuter, är kolven fylld av en starkt färgad gas; i absorptionsvattnet kan man påvisa och eventuellt kvantitativt bestämma salpetersyra och salpetersyrlighet. Efter begagnandet måste kolven ursköljas och elektroderna noga avtorkas, emedan de eljest visa stark ärgbildning.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälningar.

T. Brodén, N. Bjerrum och E. Strömgren. *De exakta naturvetenskaperna under det nittonde århundradet.*

Detta arbete framträder såsom en självständig del av det stora kulturhistoriska serieverket »det nittonde århundradet», utgivet under redaktion av professor Aage Friis, och torde vara den del därav som främst har intresse för denna tidskrifts läsare.

Verket inledes — tyvärr skulle vi vilja säga — av en uppsats om matematik och mekanik av Torsten Brodén. Tyvärr, ty det är alltför antagligt, att mången som börjat läsa arbetet därigenom skall låta avskräcka sig från att fortsätta. Denna avdelning är nämligen till den grad abstrakt skriven, att det är så gott som uteslutet, att någon som icke är professionell matematiker skulle kunna hava något utbyte av densamma.

Efter en inledning, som huvudsakligen handlar om matematikens natur — frågan »hjälpvetenskap eller självständig vetenskap?» upptages —, övergår förf. till ett kapitel om »allmänna tendenser, viktiga begrepp och metoder». I detta kapitel sägas några ord om kurvor utan tangent, icke-Euklideiska geometrier, transformationer med invarianter, Riemannska ytor, imaginära tal, Hamiltonska kvaternioner m. m., men det hela så kortfattat, att den som ej vet det förut knappast får något annat intryck därav, än att det hela är något mystiskt. Så säger förf. t. ex. angående imaginära tal: »En s. k. komplex kvantitet har formen $x+iy$, där x och y äro reella och i den imaginära enheten.» Det är något svårt att förstå, för vem förf. egentligen skriver: den som vet vad »den imaginära enheten» är, torde nog

även känna de komplexa talen, och för den som icke vet det är det hela meningslöst. Och ungefär på liknande sätt förhåller det sig med hela detta kapitel.

Det följande kapitlet om »mängdlära och icke-Euklideisk geometri samt matematisk logik» är måhända något lättfattligare, men även här ger förf. efter för sitt begär att börja med det abstraktaste i stället för att utgå från lättfattliga exempel, och att stundom beröra en del saker som alls ej förklaras. Så t. ex. när det sid. 28 säges: »Logiskt möjliga äro, i förbigående sagt, även mängder, vilkas element icke äro absoluta enheter och ej heller låta upplösa sig i sådana, utan existera endast såsom sammanfattningar av andra element.» Vilket begrepp skall en person, som ej i grund känner hela mängdläran, göra sig om detta?

I de följande kapitlen, som behandla mekanik, nämligen »den klassiska mekanikens fortbildning», »1800-talets kritik av den klassiska mekaniken» samt »kunskapsteoretiska betraktelser över tid och rum; Einsteins relativitetsteori», blir förf. alltmer svårbegriplig, och särskilt i det sista torde ej många kunna (eller vilja) följa honom. Slutligen är det ganska förvånande, att förf. i ett arbete om det nittonde århundradets matematik ej nämnt ett ord om sannolikhetskalkylen och dess tillämpning på livförsäkring, ett kapitel som jämförelsevis lätt kan populariseras och säkerligen skulle intressera en större publik.

*

Av helt annan natur är N. Bjerrums uppsats om Fysiken och Kemin i det nittonde århundradet. Förf. är tydligen en populariserare av rang. Här kommer intet omotiverat framkastat, utan förf. följer historiskt idéernas utveckling, så att även det nyaste och mest abstrakta tränger sig på läsaren såsom en konsekvens av hela den föregående utvecklingen.

Efter en inledning, behandlande frågan, varför just under det nittonde århundradet och de första decennierna av det tjugonde naturvetenskaperna gått framåt med sådana jätte-

steg som aldrig förr, följer det första kapitlet »Atomteori och Kemi». Här följer förf. grundämnes- och atombegreppens utveckling från Robert Boyle på 1600-talet över Lavoisier, Dalton, Berzelius, Avogadro o. s. v. fram till de modernaste teorierna angående strukturformler och stereokemi.

Det andra kapitlet handlar om »Energi- och Entropiprinciperna; Den mekaniska värmeteorin». Det innehåller en, såvitt det i en populär framställning är möjligt, fullständig framställning av den mekaniska värmeteorin, även innehållande affinitetsläran och läran om kemisk jämvikt. Särskilt är att märka, att förf. lyckats giva en ganska lättfattlig förklaring av det svåra begreppet entropi. Kapitlet slutar med en kort, men intressant, framställning av striden mellan energetiker och atomister.

Det tredje kapitlet »Elektricitetslära och ljuslära; eterfysik och relativitetsteori» utgår från elektromagnetismens upptäckt genom Ørsted, framställer, huru dessa fenomens teorier utvecklats av Faraday och Maxwell, kampen mellan emissions- och undulationsteorierna för ljuset, och huru den senares svårigheter undanröjts genom Maxwells teori och Herz' undersökningar; varigenom förf. osökt kommer in på frågan om etern och Michelsons bekanta experiment samt Lorenz' och Einsteins relativitetsteorier. Av den sistnämndes allmänna relativitetsteori gives en jämförelsevis lättfattlig framställning.

Det fjärde kapitlet »Atomernas sammansättning» börjar, efter en kort historisk inledning, med Mendelejeffs periodiska system, övergår sedan till spektralanalysen, där bl. a. Paschens och Rydbergs serier behandlas, för att sedan mera utförligt behandla elektronteori och radioaktivitet, och slutligen komma fram till Plancks kvantteori, som dock ej i förf. synes hava någon beundrare, samt Bohrs atommodell. Avhandlingens avslutning, liksom dess inledning, ägnas åt några allmänna betraktelser över den allmänna karaktären hos det nittonde århundradets naturvetenskap.

*

Sist i boken kommer Hr E. Strömgrens avhandling om astronomiens utveckling under det nittonde århundradet. Även denna börjar med en allmän översikt, men av i viss mån annat innehåll än de föregående: Hr S. säger nämligen, att för hans vetenskap detta sekel ej haft större betydelse än vissa andra perioder, nämligen det alexandrinska tidevarvet, renässansen och Newtons tid, under det att han ej anser det omöjligt, att framtiden kan komma att betrakta de första årtiondena av det tjugonde århundradet såsom speciellt astronomins årtionden.

Därpå följer angivande av astronomins 6 huvudproblem: bestämmande av de skenbara lägena och rörelserna, förklaringen av de verkliga rörelserna, undersökningen av himlakropparnas utseende, astrofotometrin, undersökning av himlakropparnas fysiska och kemiska beskaffenhet och slutligen stellarastronomin, d. v. s. utforskningen av stjärnsystemets byggnad, dimensioner, massor m. m. Dessa olika problem behandlas sedan vart för sig med redogörelse för i vad mån det nittonde århundradet utvecklat de föregående tidernas verk, och huru det ändrat problemställningen. Särskilt betonas härvid naturligtvis de insatser som gjorts genom fotografins och spektralanalysens tillämpning på observationsmetoderna, ävensom det storartade samarbete mellan olika astronomiska institutioner, som möjliggjort framstegen. Uppsatsen avslutas även med en förteckning på de viktigaste astronomiska sällskapen och tidskrifterna, ävensom en förteckning på uppsatser som kunna rekommenderas till studium för en icke matematiskt skolad läsare. På det hela kan man säga, att avhandlingen inom sitt knappt tillmätta utrymme av 45 sidor ger en god bild av astronomins framsteg från äldsta tider till våra dagar. *M—r.*

* * *

Professor J. Herrmann, *Elektroteknik I. Fysikaliska grundlagar.* Översättning av lektor Möller.

Detta arbete är, som bekant, skrivet av en framstående tysk elektrotekniker. Det är ytterst vanligt, att tekniker ej

äro starka vid behandlingen av fysikens grundbegrepp och grundlagar, och prof. Herrmann är i detta avseende lik flertalet av sina kolleger. Boken börjar med behandling av det magnetiska flödet. Denna behandling kan grundas såväl på Coulombs lag som på »Ohms lag för magnetism». Prof. Herrmann har liksom flertalet tyskar valt den förstnämnda vägen. Denna är givetvis tyngre än den senare. Begreppet magnetpol torde enligt anmälarens mening tillräckligt länge undanskymt det väsentliga i de magnetiska fenomenen och borde därför uteslutande behandlas i fysikens historia. Prof. Herrmann kan dock ej undvara »Ohms lag för magnetism», som behandlas i § 34.

Begreppet elektromotorisk kraft behandlas före begreppet elektrisk ström. Följden härav är att enheten volt definieras genom ekv. $E = \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8}$ volt. Någon explicit definition på denna viktiga enhet gives först i en bilaga till boken, och då gives ej den internationella definitionen utan endast den absoluta.

Likartade oegentligheter vidlåda de flesta av de införda definitionerna på elektriska storheter. Enheterna ampère och Ohm införas utan att definieras förrän i bilagan.

Elektriska lagar anföras utan motivering.

Boken är således ej avsedd att vara en lärobok i fysikaliska grundlagar för elektrotekniken utan måste uppfattas som ett uppräknande av de förutsättningar på vilka följande delar bygga. Det hade dock varit önskvärt, att detta uppräknande skett efter en bättre genomtänkt plan.

Så snart förf. kommit in på sitt eget område, elektrotekniken, blir arbetets värde ett helt annat. En person, som redan inhämtat elektricitetslärans grundbegrepp och grundlagar, torde dock även i denna första del kunna finna åtskilligt läsvärt.

Den innehåller nämligen en del förutsättningar för elektrotekniken, som ej bruka meddelas i elementära elektricitetsläror.

Boken är 132 sidor och kostar kr. 3,50. *O. G—r.*

Ett geometriskt bevis för att minimideviation vid ett prisma inträffar för symmetrisk genomgång.

Beteckningarna äro de vanliga, se fig. 1.
Man har då

$$\frac{\sin i_1}{\sin b_1} = n \qquad \frac{\sin i_2}{\sin b_2} = n$$

$$b_1 + b_2 = v$$

$$\delta = (i_1 - b_1) + (i_2 - b_2).$$

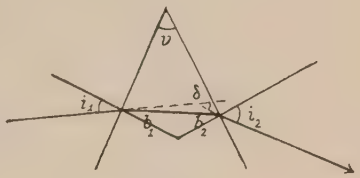


Fig. 1.

Man kan konstruera δ sålunda (jfr exempel 50 i Moll). Upprita två koncentriska cirklar, den ena med radien r den andra med radien nr. Tag en punkt P på den yttre cirkeln och sammanbind P med cirklarnas medelpunkt O. Om man känner den första vinkeln b_1, så avsätt denna vinkel i P utefter PO. Då känner man även $b_2 = v - b_1$ och denna vinkel avsättes åt andra hållet. Dessa linjer skära den inre cirkeln i B_1 och B_2 resp. Vinkeln OB_1A_1 blir då den till b_1 svarande vinkeln i_1, likaså OB_2A_2 den till b_2 svarande vinkeln i_2

$$\because \measuredangle B_1OB_2 =$$

$$= (i_1 - b_1) + (i_2 - b_2) = \delta.$$

Det gäller nu att visa att δ antar ett minimivärde δ_0 för symmetrisk genomgång, d. v. s.

$$i_1 = i_2 = i \qquad b_1 = b_2 = \frac{v}{2}.$$

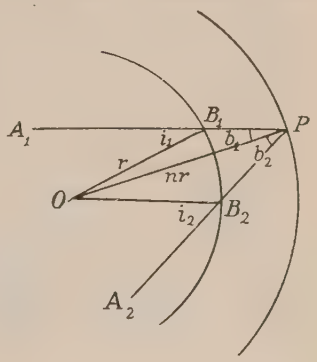


Fig. 2.

Fig. 3 visar den ovan givna konstruktionen för detta fall. $\triangle B_1PB_2$ är likbent. Den kring $\triangle B_1PB_2$ omskrivna cirkeln kommer då att tangera den yttre cirkeln i P och således ligga helt inom den yttre cirkeln.

Bevis: Bågen B_1PB_2 är orten för en punkt varifrån B_1B_2 synes under vinkeln v. Om man då tager en punkt P' i närheten av P på den yttre cirkeln så är $B_1P'B_2 < v$. Nu kunna vi anse att vi kommit till punkten P' genom att variera infallsvinkeln till $i - \triangle i$. Skulle vi i så fall fullfölja konstruktionen så skulle vi mot B_1P' sätta en vinkel $B_1P'B' = v$. Då måste $P'B'$ skära den inre cirkeln utanför bågen B_1B_2 då ju $B_1P'B_2$ var $< v$. Varav synes att deviationen växer. Detta gäller naturligtvis även om i_1 växer från i, att δ då ökas.

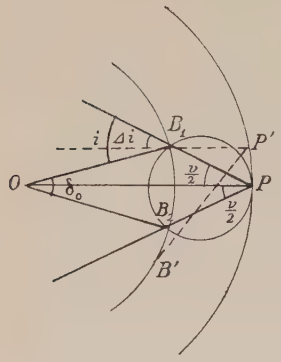


Fig. 3.

$\because \delta = \delta_0$ är ett minimum för deviationen som inträffar när

$$i_1 = i_2 = i \qquad b_1 = b_2 = \frac{v}{2}.$$

Sven Ringenson.

Ett bevis för ptolemeiska satsen.

Den ptolemeiska satsen innebär — från dimensionssynpunkt — ett ytsamband. Såsom sådan kan den också synnerligen lätt härledas, och beviset synes mig dels överträffa det vanliga i fråga om enkelhet, dels ställa själva satsen i klarare belysning.

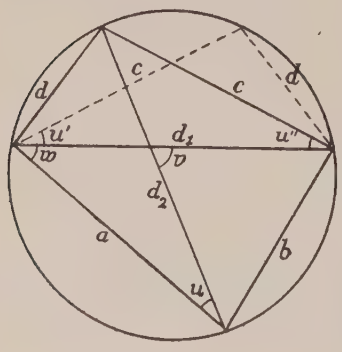


Fig. 4.

Låt den inskrivna fyrhörningens sidor vara i ordning a, b, c, d, dess diagonaler d_1 och d_2. Med i fig. 4 angiven vinkelbeteckning är då fyrhörningens yta

$$F = \tfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin v.$$

En annan i samma cirkel inskriven fyrhörning, erhållen ur

den förra genom att sidorna c och d byta plats, har påtagligen lika stor yta. Men den nya fyrhörningen delas genom sin ena (i figuren icke utritade) diagonal i två trianglar med respektive ytorna

$$\tfrac{1}{2}ac \sin (u' + w) \text{ och } \tfrac{1}{2}bd \sin (u' + w).$$

Nu är ju $u' = u'' = u$, således

$$u' + w = u + w = v.$$

Då är den nya fyrhörningens yta

$$F' = \tfrac{1}{2}(ac + bd) \sin v,$$

och likheten $F = F'$ ger omedelbart

$$d_1 d_2 = ac + bd.$$

Olof Josephson.

Inköp av fysiska apparater

för undervisningsbruk äro i vårt land förbundna med stora svårigheter. De svenska firmorna sakna tillräckliga vetenskapliga och ekonomiska resurser för att medgiva ett tillräckligt omfattande urval och för att kunna följa med sin tid. Och erfarenheten visar, att inköp från utlandet efter katalog medföra stora risker. Det är som att köpa grisen i säcken.

Vad vi behöva är en *statlig inköpscentral*, lämpligen förlagd till huvudstaden. Denna skulle stå under ledning av universitets-, läroverks- och folkskolemän, ha affärsmässig organisation samt disponera tillräckliga penningmedel för inköp av samt tillräckliga lokaler för förvaring och demonstration av för undervisning lämpliga apparater från in- och utländska firmor.

Måhända kunde man vidga inköpscentralens uppgift att även omfatta undervisningsmateriell för övriga ämnen, kanske ock inredningsmateriell för skolor. Till synes så enkla saker som inköp av skolbänkar, ritbord, gymnastikattiralj äro i närvarande stund förbundna med stora svårig-

heter. Var kan man få underrättelse om vilka modeller, som för närvarande anses ändamålsenligast? Ingenstädes. Misstag kosta stora belopp och kunna knappast repareras.

Möjligen skulle det nuvarande skolmuseet kunna utgöra stomme för en utveckling i nu antydd riktning. Såsom detta nu är organiserat spelar det ju tyvärr ingen nämnvärd roll. Jämte modern materiell borde ock apparater från en gången tids undervisning beredas plats där i stället för att som nu ställas undan i universitetens och läroverkens skräpvrår för att kanske snart nog försvinna.

H—m.

Matematiska uppgifter.

145) Om a och b äro rätvinkliga koordinater, var skall punkten (a, b) ligga för att ekvationen

$$4x^2+4(a+b)x+a^2+b^2=0$$

skola hava båda rötterna liggande mellan $+1$ och -1?

146) På en halvcirkel med diametern AB tages en punkt C, och CD fälles vinkelrätt mot AB. Figuren roterar kring AB. Visa, att det alltid finnes en och endast en punkt C, sådan att summan av de ytor som generas av bågen AC och linjen CD har till summan av de ytor som generas av bågen BC och linjen CD ett givet förhållande.

147) Bevisa att summan

$$s_n=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ \ldots\ +(n-1)n$$

är jämnt delbar med n, om n är ett relativt primtal till 3.

(*G. L—g.*)

148) A_1, B_1, C_1, äro mittpunkter till sidorna BC, CA och AB i $\triangle ABC$. Från en punkt P dragas PA, PB och PC, och genom A_1, B_1, C_1 linjer resp. parallella med dessa. Visa att även dessa råkas i samma punkt. *X.*

149) I en vid A rätvinklig triangel ABC är $a=4$ cm, och produkten av bissektriserna till β och γ $m^2=8$ cm^2. Sök dessa vinklar.

150) En triangels sidor äro delade i resp. p, q, r delar, och delningspunkterna äro sammanbundna med motstående vinkelspets. I hur många stycken blir triangeln delad, förutsatt att aldrig tre linjer skära varandra i samma punkt?

Lösningar till uppg. i häft. 3. 1922—23.

133) *Visa att* $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ *alltid är divisibelt med* x^2+x+1, *då* n *är ett helt tal.*

Bevis 1 (direkt). Kallas x^2+x+1 för p, så fås

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}=(x+1)(x^2+2x+1)^n+x^{n+2}=$$
$$=(x+1)(p+x)^n+x^{n+2}=(x+1)(\mu p+x^n)+x^{n+2}=$$
$$=(x+1)\mu p+x^n(x+1+x^2)=(x+1)\mu p+x^n p=k\cdot p.$$

Bevis 2 (från n till $n+1$). Lätt inses att satsen gäller för $n=0$.

Sättes då $\varphi(x,\ n)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$, så är

$$\varphi(x, n+1)=(x+1)^{2n+3}+x^{n+3}=(x+1)^2(x+1)^{2n+1}+x\cdot x^{n+2}=$$
$$=(x^2+x+1)(x+1)^{2n+1}+x\varphi(x,\ n),$$

varur satsen omedelbart följer. (*X., Iter.*)

Bevis 3 (med imaginära tal).

Om ε och ε_1 äro rötterna till ekv. $x^2+x+1=0$, så är

$$\varepsilon+1=-\varepsilon^2 \text{ och } \varepsilon^3=1, \text{ och likaledes för } \varepsilon_1.$$

Sättes då $F(x)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$, så försvinner $F(x)$ för $x=\varepsilon$ och ε_1, ty

$$F(\varepsilon)=(-\varepsilon^2)^{2n+1}+\varepsilon^{n+2}=-\varepsilon^{4n+2}+\varepsilon^{n+2}=$$
$$=-(\varepsilon^3)^n\cdot\varepsilon^{n+2}-\varepsilon^{n+2}=0$$

och likaledes för $x=\varepsilon_1$. Alltså måste $F(x)$ innehålla faktorn $(x-\varepsilon)(x-\varepsilon_1)=x^2+x+1$. X.

134) Bevisa att $\operatorname{tg} 3v=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+v\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-v\right)$.

$$\operatorname{tg} 3v=\frac{\operatorname{tg} v+\frac{2\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg}^2 v}}{1-\frac{2\operatorname{tg}^2 v}{1-\operatorname{tg}^2 v}}=\frac{3\operatorname{tg} v-\operatorname{tg}^3 v}{1-3\operatorname{tg}^2 v}=\operatorname{tg} v\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 v}{1-3\operatorname{tg}^2 v}=$$

$$=\operatorname{tg} v\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}^2 v}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}^2 v}=\operatorname{tg} v\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} v}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} v}=$$

$$=\operatorname{tg} v\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+v\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-v\right).$$

(Löst av »*Iter*».)

Anm. Satsen kan generaliseras genom att ersätta 3 med ett positivt udda tal n. Man får då formeln:

$$\operatorname{tg} nx=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}+x\right)\ldots$$

$$\ldots\operatorname{tg}\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}+x\right).$$

Ty sättes $\varepsilon=e^{\frac{\pi i}{n}}$, så är $\varepsilon^2=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ en primitiv n-te rot till enheten, och

$$z^n-1=(z-\varepsilon^{2\cdot 0})(z-\varepsilon^{2\cdot 1})\ldots(z-\varepsilon^{2(n-1)})=\prod_0^{n-1}(z-\varepsilon^{2r}).$$

Då blir

$$z^n-\frac{1}{z^n}=\frac{(z^2)^n-1}{z^n}=\prod_0^{n-1}\frac{z^2-\varepsilon^{2r}}{z}=\prod_0^{n-1}\varepsilon^r\left(\frac{z}{\varepsilon^r}-\frac{\varepsilon^r}{z}\right).$$

Rötterna till $z^n+1=0$ bliva då

$$-1,\ -\varepsilon^2,\ -\varepsilon^4\ldots,\ -\varepsilon^{2(n-1)}$$

och således

$$z^n+1=\prod_{0}^{n-1}(z+\varepsilon^{2r})$$

och likaledes

$$z^n+\frac{1}{z^n}=\prod_{0}^{n-1}\varepsilon^r\left(\frac{z}{\varepsilon^r}+\frac{\varepsilon^r}{z}\right),$$

och slutligen

$$\frac{z^n-z^{-n}}{z^n+z^{-n}}=\prod_{0}^{n-1}\frac{\frac{z}{\varepsilon^r}-\frac{\varepsilon^r}{z}}{\frac{z}{\varepsilon^r}+\frac{\varepsilon^r}{z}}.$$

Vi sätta nu $z=e^{ix}$, så fås ur sista likheten

$$\operatorname{tg} nx=\frac{1}{i}\prod_{0}^{n-1} i\operatorname{tg}\left(x-\frac{r\pi}{n}\right)=$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\ldots\operatorname{tg}\left(x-\frac{r\pi}{n}\right)\ldots\operatorname{tg}\left(x-\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Om man nu ökar argumenten i de $\frac{n-1}{2}$ sista faktorerna med π och ändrar tecken i de $\frac{n-1}{2}$ närmast föregående, så fås ovanstående formel. *X.*

135) *Att upprita en triangel, då man känner två sidor och mellanliggande vinkels bissektris.*

a, b, v_c de givna sträckorna med vanliga beteckningar. Avsätt på en rät linje åt samma håll $CA=b$ och $CB_1=a$. Konstruera den till A och B_1 hörande harmoniska cirkel, som går genom C, och inpassa i denna kordan $CD=v_c$. Omstjälpes triangeln CDB_1 omkring CD, faller B_1 i B och ABC är den sökta triangeln. DA och DB falla nämligen i rät linje, emedan DC är yttre bissektris till vinkeln ADB_1. Konstruktionen är möjlig, om v_c understiger harmoniska mediet mellan a och b.

Anm. Avsättas $CA=b$ och $CB_1=a$ åt motsatta håll, leder samma konstruktion till en triangel, i vilken *yttre* bissektrisen

har längden v_e. För konstruktionens utförbarhet fordras då, att v_e understiger absoluta beloppet för det harmoniska mediet mellan a och $(-b)$. *X.*

136) *Uttryck höjden h_a i en triangel såsom en funktion av r och r_a.*

$$\frac{2}{h_a}=\frac{a}{T}=\frac{p}{T}-\frac{p-a}{T}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a},\quad h_a=\frac{2r\,r_a}{r_a-r}.$$

h_a är det harmoniska mediet mellan r och $-r_a$, vilket för övrigt följer direkt geometriskt därav, att medelpunkterna till den inskrivna och den vid sidan a vidskrivna cirkeln dela sträckan v_a harmoniskt. *X.*

137) *Enckes komet har en omloppstid av 1218 dygn. Ellipsens storaxel är 4,2 och dess lillaxel 2,4 jordbaneradier. Hur lång tid behöver kometen för att gå från sitt aphelium till den punkt, där för första gången dess avstånd från storaxeln är 0,6 jordbaneradier?*

Låt kometbanans ekvation vara

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

och antag, att solens medelpunkt befinner sig i $F(-c,\ o)$. Om då kometen rör sig från $A(a,\ o)$ till $P(x,\ y)$, så är ytan av den av medelpunktsradien (radien från ellipsens medelpunkt O) beskrivna ellipssektorn OAP

$$S_e=\frac{b}{a}\cdot S_c,$$

där S_c betecknar ytan av den cirkelsektor OAQ, som beskrives av den genom $P(x,\ y)$ gående ordinatans skärningspunkt Q med ellipsens omskrivna cirkel. Man har således

$$S_e=\frac{1}{2}ab\arccos\frac{x}{a}.$$

Adderas härtill ytan av triangeln FOP, som är

$$T_e=\frac{1}{2}cy=\frac{1}{2}c\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

erhålles den av brännpunktsradien från $F(-c, o)$ beskrivna ytan

$$A_x = \frac{1}{2}ab\left(\arccos\frac{x}{a} + e\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Enligt ytsatsen för centralrörelsen (Kepplers andra lag) är

$$\frac{t}{1218} = \frac{A_x}{\pi ab},$$

således

$$t = \frac{609}{\pi}\left(\arccos\frac{x}{a} + e\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

För ellipsens excentricitet finner man värdet $e = \frac{1}{7}\sqrt{33}$. Sättes nu $\frac{y}{b} = \frac{1}{2}$, erhålles ur (1) $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, således

$$\arccos\frac{x}{a} = \frac{1}{6}\pi$$

och

$$t = 101{,}5 + \frac{87\sqrt{33}}{2\pi} = 181{,}042.$$

Den sökta tiden är således 181 dygn. (*X., Iter.*)

138) *Tvärsnittet av ett rakt, obegränsat prisma är en liksidig triangel med sidan a. Man kan skära detta prisma med plan, vilkas sidor förhålla sig som 3, 4, 5. Hur stora äro sidorna i dessa trianglar?*

Den liksidiga triangelns sida kallas 1. Om den nya triangeln kallas *ABC* och har vinkelspetsen *A* gemensam med bastriangeln och sidorna 3λ, 4λ, 5λ, samt prismat utvecklas i ett plan, så fås tydligen fig. 5, ur vilken omedelbart följer, att

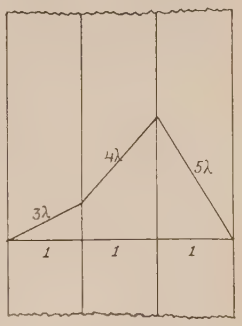


Fig. 5.

$$\sqrt{9\lambda^2 - 1} + \sqrt{16\lambda^2 - 1} = \sqrt{25\lambda^2 - 1},$$

vilket ger $$\lambda = \sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{193}}{288}}.$$

Det undre tecknet måste förkastas, emedan det gör rotuttrycken i den föregående ekvationen imaginära. Det övre tecknet ger $\lambda = 0{,}3675$, således sidorna 1,10, 1,47 och 1,84.

»Iter».

Prisuppgift för 1923—24

för lärjungar vid allm. läroverk, tekniska skolor o. d.

Konstruera en anordning för automatisk inmontering av skioptikonbilder.

Bilderna äro i förväg ordnade och inlagda i en behållare. Föreläsaren, som tänkes stående vid skärmen, bör sedan, t. ex. genom tryckning på en knapp, kunna verkställa ombyte och förevisning av bilderna.

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa likställda enskilda läroverk. Tävlingsskrift insändes före den 1 mars 1924. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Om lämpliga tävlingsskrifter inkomma, utdelas tre pris, bestående av värdefulla arbeten i fysik.

Red.

En generalisation av binomialteoremet.

Av C. A. MEBIUS.

1. Med $C(z, \alpha, n)$ eller kortare $C(z)$ beteckna vi följande produkt av n faktorer

$$C(z, \alpha, n)=(1+z)(1+\alpha z)(1+\alpha^2 z)\ldots(1+\alpha^{n-1}z), \quad \ldots(1)$$

och vi skola utveckla denna produkt i en serie, som fortskrider efter stigande digniteter av z. För $\alpha=1$ övergår produkten till $(1+z)^n$, och därför utgör binomialteoremet ett enskilt fall av produktens utveckling i serie.

Utföres multiplikationen, erhåller man en potensserie av formen

$$C(z, \alpha, n)=1+h_1 z+h_2 z^2+\ldots+h_n z^n, \quad \ldots\ldots(2)$$

vars koefficienter vi vilja bestämma.

Sätter man för detta ändamål i (1) αz i stället för z och multiplicerar med $1+z$, så erhåller man

$$(1+z)C(\alpha z)=C(z)(1+\alpha^n z)$$

eller enligt (2)

$$(1+z)\{1+h_1\alpha z+\ldots+h_{r-1}\alpha^{r-1}z^{r-1}+h_r\alpha^r z^r+\ldots+h_n\alpha^n z^n\}=$$
$$(1+\alpha^n z)\{1+h_1 z+\ldots+h_{r-1}\quad z^{r-1}+h_r z^r\ +\ldots+h_n\ \ z^n\},$$

och härav följer

$$1+\ldots+z^r(h_r\alpha^r+h_{r-1}\alpha^{r-1})+\ldots+h_n\alpha^n z^{n+1}=$$
$$1+\ldots+z^r(h_r\ \ +h_{r-1}\alpha^n\ \ )+\ldots+h_n\alpha^n z^{n+1}.$$

Då de båda leden i denna ekvation äro identiska, så måste

$$h_r\alpha^r+h_{r-1}\alpha^{r-1}=h_r+h_{r-1}\alpha^n$$

eller

$$h_r=\frac{\alpha^n-\alpha^{r-1}}{\alpha^r-1}\cdot h_{r-1} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

Låta vi här r efter vartannat antaga värdena 1, 2, ... $(r-1)$, r, och sätta vi för symmetriens skull $1=h_0$, så erhålles

$$\begin{aligned}
h_0 &= 1 \\
h_1 &= \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot h_0 \\
h_2 &= \frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}\cdot h_1 \\
&\vdots \\
h_{r-1} &= \frac{\alpha^n-\alpha^{r-2}}{\alpha^{r-1}-1}\cdot h_{r-2} \\
h_r &= \frac{\alpha^n-\alpha^{r-1}}{\alpha^r-1}\cdot h_{r-1}.
\end{aligned}$$

Multipliceras dessa ekvationer led för led, så erhålles efter bortdividerandet av $h_0 \cdot h_1 \cdot h_2 \ldots h_{r-1}$

$$h_r = \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha^2}{\alpha^3-1}\cdots\frac{\alpha^n-\alpha^{r-1}}{\alpha^r-1} \quad . \quad . \quad (4)$$

Följaktligen är

$$\left.\begin{aligned}
C(z,\alpha,n) &= (1+z)(1+\alpha z)(1+\alpha^2 z)\ \ldots\ (1+\alpha^{n-1}z) = \\
&= 1+\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}z+\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}z^2+ \\
&+\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha^2}{\alpha^3-1}z^3+\ldots+\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}z^n \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Den sista koefficienten h_n erhålles ur (4) genom att sätta $r=n$ och ur den 2:a, 3:e ... n:te faktorn utbryta resp. α, α^2, ... α^{n-1}. Man får nämligen då

$$h_n = \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^{n-2}-1}{\alpha^3-1}\cdots\frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}\cdot\alpha^{1+2+\ldots+n-1} = \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2. Koefficienterna h_r, som framgå ur den allmänna formeln (4), hava ett visst tycke av motsvarande binomial-

koefficienter. Den allmänna binomialkoefficienten har formen

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(r-1)}{r},$$

och det är lätt att visa, det

$$\lim_{\alpha=1} h_r = \binom{n}{r}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

För $\alpha=1$ bliva alla faktorerna i täljaren och nämnaren av h_r i formeln (4) noll. Men ekvationen (3) erhölls ur ekvationen

$$h_r(\alpha^r - 1) = h_{r-1}(\alpha^n - \alpha^{r-1}).$$

Nu är

$$\alpha^n - \alpha^{r-1} = \alpha^n - 1 - (\alpha^{r-1} - 1) =$$
$$= (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}) -$$
$$-(\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{r-2})$$

och

$$\alpha^r - 1 = (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{r-1}).$$

Genom division av dessa båda ekvationer led för led och bortförkortandet av faktorn $\alpha-1$ fås

$$\frac{\alpha^n - \alpha^{r-1}}{\alpha^r - 1} =$$
$$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}) - (1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{r-2})}{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{r-1}}.$$

Låta vi nu α obegränsat närma sig till 1, fås

$$\lim_{\alpha=1} \frac{\alpha^n - \alpha^{r-1}}{\alpha^r - 1} = \frac{n-(r-1)}{r},$$

och således övergår varje faktor i h_r till motsvarande faktor i binomialkoefficienten, och därmed är ekv. (6) bevisad.

Serieutvecklingen (5) omfattar alltså binomialteoremet såsom ett enskilt fall och kan följaktligen anses såsom en generalisation av detta teorem, vilket redan förut påpekats.

3. Serieutvecklingen (5) kan generaliseras. Sätta vi nämligen $z=\frac{y}{x}$, så övergår produkten till

$$\frac{x+y}{x}\cdot\frac{x+\alpha y}{x}\cdot\frac{x+\alpha^2 y}{x}\cdots\frac{x+\alpha^{n-1}y}{x}$$

och serien till

$$1+h_1\frac{y}{x}+h_2\frac{y^2}{x^2}+\ldots+\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{y^n}{x^n}.$$

Multipliceras nu båda dessa identiskt lika uttryck med x^n, så erhålles

$$\left.\begin{aligned}&(x+y)(x+\alpha y)(x+\alpha^2 y)\ldots(x+\alpha^{n-1}y)=\\ &=x^n+\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}x^{n-1}\cdot y+\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}x^{n-2}y^2+\ldots\\ &\ldots+\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\alpha^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}xy^{n-1}+\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}y^n.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

4. En ännu allmännare formel erhålles, om man i (7) sätter $\alpha=\frac{b}{a}$. Produkten på vänstra sidan antager då formen

$$(x+y)\cdot\frac{ax+by}{a}\cdot\frac{a^2x+b^2y}{a^2}\cdots\frac{a^{n-1}x+b^{n-1}y}{a^{n-1}}.$$

Hopmultipliceras här alla nämnarna, fås

$$a^{1+2+3+\ldots+(n-1)}=a^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

För att finna den form, som högra sidan av (7) antager, observera vi, att uttrycket (4) för h_r kan skrivas

$$h_r=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha^2-1}\cdot\ldots\frac{\alpha^{n-(r-1)}-1}{\alpha^r-1}\cdot\alpha^{1+2+\ldots+(r-1)}.$$

Sättes här $\alpha = \frac{b}{a}$, fås

$$h_r = \frac{\frac{b^n - a^n}{a^n}}{\frac{b-a}{a}} \cdot \frac{\frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{a^{n-1}}}{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} \cdots \frac{\frac{b^{n-(r-1)} - a^{n-(r-1)}}{a^{n-(r-1)}}}{\frac{b^r - a^r}{a^r}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{r(r-1)}{2}}$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a-b} \cdot \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a^2 - b^2} \cdots$$

$$\cdots \frac{a^{n-(r-1)} - b^{n-(r-1)}}{a^r - b^r} \cdot \frac{a^{1+2+\ldots+r}}{a^{n+(n-1)+\ldots+[n-(r-1)]}} \cdot \frac{b^{\frac{r(r-1)}{2}}}{a^{\frac{r(r-1)}{2}}}$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a-b} \cdot \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a^2 - b^2} \cdots \frac{a^{n-(r-1)} - b^{n-(r-1)}}{a^r - b^r} \cdot \frac{b^{\frac{r(r-1)}{2}}}{a^{nr - \frac{r(r+1)}{2}}}.$$

Multipliceras båda membra i den nya allmännare formeln med $a^{\frac{n(n-1)}{2}}$, blir koefficienten för $x^{n-r}y^r$

$$k_r = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot h_r,$$

eller då

$$a^{\frac{n(n-1)}{2}} : a^{nr - \frac{r(r+1)}{2}} = a^{\frac{1}{2}[n^2 - n - 2nr + r^2 + r]} = a^{\frac{(n-r)[n-(r+1)]}{2}},$$

$$\left.\begin{aligned} k_r = \frac{a^n - b^n}{a-b} \cdot \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a^2 - b^2} \cdots \\ \cdots \frac{a^{n-(r-1)} - b^{n-(r-1)}}{a^r - b^r} \cdot a^{\frac{(n-r)[n-(r+1)]}{2}} \cdot b^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Alltså erhålles

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(ax+by)(a^2x+b^2y)\ldots(a^{n-1}x+b^{n-1}y) = \\ = a^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n + \frac{a^n - b^n}{a-b} a^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} x^{n-1} \cdot y + \\ + \frac{a^n - b^n}{a-b} \cdot \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a^2 - b^2} \cdot a^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \cdot b^{\frac{2 \cdot 1}{2}} x^{n-2} y^2 + \ldots + \\ + \frac{a^n - b^n}{a-b} \cdot b^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} xy^{n-1} + b^{\frac{n(n-1)}{2}} y^n \cdots \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Koefficienterna i termer, som ligga lika långt från den första som från den sista, äro lika utom däruti, att a och b hava bytt plats. Detta är naturligt, emedan produkten i vänstra membrum blir oförändrad, om man i varje faktor låter x-termen och y-termen byta plats. Utför man räkningen sedan på samma sätt som nyss, komma termerna i högra membrum att vara ordnade efter avtagande dignitet av y, men b står nu i stället för a. Man får samma uttryck som i högra membrum av (9), men termerna stå i omvänd ordning, börjande med den sista.

Tillämpningar.

5. Låter man i formeln (7) y få värdet -1, och sätter de båda lika uttrycken $=0$, får man av vänstra membrum ekvationen

$$(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots(x-\alpha^{n-1})=0 \quad \ldots \quad (10\,a)$$

Denna ekvation har rötterna

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots\ \alpha^{n-1};$$

de bilda alltså en geometrisk serie.

Av högra membrum erhålles ekvationen

$$\left.\begin{aligned} x^n - \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}x^{n-1} + \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}x^{n-2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^n \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} = 0, \quad \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \quad (10\,b)$$

vilken tydligen har samma n rötter.

På grund av sambandet mellan en ekvations rötter och koefficienter, äro koefficienterna i den sista ekvationen de symmetriska grundfunktionerna av den geometriska seriens termer. Sålunda är $\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}$ rötternas summa d. v. s.

$$\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} = 1+\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^{n-1},$$

eller den bekanta summan av den geometriska serien.

Den nästa koefficienten h_2 är summan av rötternas tvålediga produkter, således

$$\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}=1\cdot\alpha+1\cdot\alpha^2+\ldots+1\cdot\alpha^{n-1}+\alpha\cdot\alpha^2+$$
$$+\alpha\cdot\alpha^3+\ldots+\alpha\cdot\alpha^{n-1}+\ldots+\alpha^{n-2}\cdot\alpha^{n-1}.$$

Den tredje koefficienten h_3 är summan av rötternas trelediga produkter d. v. s.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha^2}{\alpha^3-1}&=1\cdot\alpha\cdot\alpha^2+\ldots+1\cdot\alpha\cdot\alpha^{n-1}+\\ &+\alpha\cdot\alpha^2\alpha^3+\ldots+\alpha^r\alpha^s\alpha^t+\ldots,\quad\ldots\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

och i allmänhet är h_r summan av alla r-lediga produkter av termerna i den geometriska serien 1, α, α^2, $\ldots\alpha^{n-1}$.

6. Liksom det existerar relationer mellan binomialkoefficienterna, så finnes det också analoga relationer mellan koefficienterna h_r. Jag meddelar ej dessa här, men skulle någon intressera sig för dem, så hänvisas till ett mitt föregående arbete.[1] Blott ett par enkla relationer må här påpekas.

Sätter man i (5) $z=1$, fås

$$2(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^{n-1})=1+h_1+h_2+\ldots+h_n,\quad(12)$$

och sättes $z=-1$, får man

$$0=1-h_1+h_2-\ldots+(-1)^n h_n\quad\ldots\ldots\quad(13)$$

Genom addition och subtraktion av dessa båda ekvationer led för led erhålles, sedan faktorn 2 dividerats bort,

$$\left.\begin{aligned}1+h_2+h_4+\ldots&=h_1+h_3+h_5+\ldots=\\ &=(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^{n-1}),\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(14)$$

således också

$$\left.\begin{aligned}(1+h_2+h_4+\ldots)(h_1+h_3+h_5+\ldots)&=\\ =(1+\alpha)^2(1+\alpha^2)^2\ldots(1+\alpha^{n-1})^2.&\end{aligned}\right\}\quad\ldots(15)$$

[1] *C. A. Mebius:* Untersuchungen über eine Funktion deren Nullstellen eine geometrische Reihe bilden. Göteborgs K. Vetenskaps- och Vitterhets-samhälles Handlingar, 4:de följden. Bd. XXV: 7. Sid. 9.

På samma sätt får man ur ekv. (9) och (8), om man anager $x=y$,

$$\left.\begin{aligned} 2(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\ldots(a^{n-1}+b^{n-1}) &= \\ = k_0+k_1+k_2+\ldots+k_n, & \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

$$k_0=a^{\frac{n(n-1)}{2}},\quad k_n=b^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

och sätter man $x=-y$, erhålles

$$0=k_0-k_1+k_2+\ldots+(-1)^n k_n. \quad \ldots\ldots (17)$$

Adderas och subtraheras de båda föregående ekvationerna led för led och divideras resultaten med 2, fås

$$\left.\begin{aligned} (a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\ldots(a^{n-1}+b^{n-1}) &= \\ = k_0+k_2+k_4+\ldots = k_1+k_3+k_5+\ldots & \end{aligned}\right\} \quad \ldots (18)$$

7. Inom talteorien kunna de utvecklade formlerna (5), (7), (9) användas för att lösa åtskilliga uppgifter. Som exempel därpå meddelas några som jag tror nya resultat.

Att bestämma, på huru många olika sätt ett givet tal s kan sammansättas av r stycken olika addender, alla tillhörande n på varandra följande hela tal

$$c,\ c+1,\ c+2,\ \ldots,\ c+n-1.$$

Det är givet att det minsta värde, s kan erhålla, är summan av de r minsta talen, c, $c+1$, $\ldots$ $c+r-1$, och att det största värdet är summan av de r största $c+n-1$, $c+n-2$, $\ldots$ $c+n-r$. Skulle s ligga utanför dessa gränser är antalet sätt $=0$.

För enkelhets skull behandla vi först följande specialfall. Enligt ekv. (11) är summan av alla trelediga produkter av talen $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ldots\alpha^{n-1}$

$$h_3=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha^2}{\alpha^3-1}.$$

Låt n vara 6. Då är

$$\left.\begin{aligned} h_3=\frac{\alpha^6-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha(\alpha^5-1)}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha^4-1)}{\alpha^3-1}= & \\ =(1+\alpha^3)\alpha(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)\cdot\alpha^2(1+\alpha^2) & \\ =\alpha^3+\alpha^4+2\alpha^5+3\alpha^6+3\alpha^7+3\alpha^8+3\alpha^9+2\alpha^{10}+ & \\ +\alpha^{11}+\alpha^{12} \quad \ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

summan av alla tre-lediga produkter av de sex talen

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5.$$

När tre av dessa hopmultipliceras, t. ex. $\alpha^0 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^5 = \alpha^7$, så anger exponenten 7 summan av de tre talens exponenter $(0+2+5)$. Om därför talet 7 kan vara summa på mer än *ett* sätt av tre bland talen 0, 1, 2, 3, 4, 5, så förekommer α^7 i högra membrum av ekv. (11) (för $n=6$) lika många gånger, som 7 kan vara summa av tre bland de nämnda sex talen. Sista membrum av ekv. (19) är den reducerade formen av högra membrum av ekv. (11) (för $n=6$). Termen $3\alpha^7$ i (19) anger därför, att 7 kan framställas på 3 sätt såsom summa av tre bland talen 0, 1, 2, 3, 4, 5. Dessa äro

$$7=0+2+5=0+3+4=1+2+4.$$

I allmänhet anger koefficienten för en term i ekv. (19), huru många gånger exponenten för α i termen kan framställas som summan av 3 bland talen 0, 1, 2, 3, 4, 5. Talen 3, 4, 11, 12 kunna således blott på ett sätt vardera framställas, nämligen

$$3=0+1+2;\ 4=0+1+3;\ 11=2+4+5;\ 12=3+4+5;$$

talen 5 och 10 vardera på 2 sätt, nämligen

$$5=0+1+4=0+2+3,\quad 10=1+4+5=2+3+5.$$

De övriga talen 6 t. o. m. 9 kunna framställas på tre olika sätt.

Behandla nu en koefficient i serieutvecklingen (5) vilken som helst, t. ex. h_r, på samma sätt som h_3 i nyss anförda specialfall. Först och främst är det tydligt, att alla faktorerna i nämnaren av h_r [se formel (4)] kunna förkortas bort, så att h_r får formen av en hel rationell funktion av α. Detta inses omedelbart, om man tänker sig hopmultiplicera på vanligt sätt produkten i vänstra membrum av (5)

$$(1+\alpha^0 z)(1+\alpha^1 z)(1+\alpha^2 z)\ldots(1+\alpha^{n-1}z);$$

koefficienterna för de särskilda digniteterna av z kunna icke få form av bråk.

Är då en term i denna hela rationella funktion $p \cdot \alpha^s$, så inses, att talet s kan på p olika sätt framställas som summa av r stycken bland de hela talen

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1).$$

Använda vi nu ekv. (7) och sätta där $y=\alpha^c$, så blir den allmänna termen $h_r \alpha^{cr} x^{n-r}$ och koefficienten $h_r \alpha^{cr}$ är summan av de r-lediga produkterna av talen

$$\alpha^c,\ \alpha^{c+1},\ \alpha^{c+2},\ \ldots\ \alpha^{c+n-1}.$$

Om vi nu i $h_r \alpha^{cr}$ bortförkorta alla nämnarens faktorer och verkställa multiplikationerna i täljaren, så att $h_r \alpha^{cr}$ antager formen av en hel rationell funktion av α, och är i denna en term

$$m \cdot \alpha^s,$$

så kan talet s framställas på m olika sätt som summa av r stycken bland de n successiva hela talen

$$c,\ c+1,\ c+2,\ \ldots\ c+n-1.$$

Därmed uppgiften löst.

8. Det är av intresse att anmärka, det koefficienten m är densamma i motsvarande termer av utvecklingarna för $h_r \alpha^{cr}$ och h_r. Exponenten s är däremot cr enheter större i utvecklingen av $h_r \alpha^{cr}$ än i utvecklingen av h_r. Detta innebär följande sats:

Om talet s kan framställas på m olika sätt som summa av r stycken bland de n hela talen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n-1,$$

så kan talet $s+cr$ framställas på lika många sätt såsom summa av r stycken bland de n hela talen

$$c,\ c+1,\ c+2,\ \ldots\ c+n-1.$$

[Ex. $n=6$; $r=3$; $c=10$; $s=7$. $37=10+12+15=$
$=10+13+14=11+12+14$.]

9. Åtskilliga andra frågor kunna i detta sammanhang uppkastas och besvaras, men att ingå på dem nu torde göra denna uppsats allt för lång. Jag vill blott omnämna

ett par. I sista membrum av ekv. (19) äro koefficienterna för termer med lika ordningsnummer från början och från slutet lika. Det kan lätt bevisas, att detta förhållande ej är en tillfällighet, utan alltid inträffar.

Därav kan dragas en intressant slutsats, liksom också av det förut påpekade förhållandet, att i serieutvecklingen (9) koefficienterna i termer, som ligga lika långt från den första som från den sista, äro lika så när som på att a och b hava bytt plats. Tankegången vid lösningen av uppgiften i § 7 härrör från *Euler*, men han behandlar det speciella fall, då talet s framställes som summa av alla möjliga hela tal och icke såsom här av n successiva hela tal.

En generalisering av de närmast föregående satserna erhålles, om man i ekv. (7) sätter $y = -\alpha_1^c$; $\alpha = \alpha_1^d$. I stället för satser, som gälla för successiva hela tal, erhållas därigenom analoga satser, gällande för successiva termer i en aritmetisk serie c, $c+d$, $c+2d$, ...

Några tetraedersatser.

Av X.

I.

Om i en triangel av de tre punkterna tyngdpunkten, om- och inskrivna cirklarnas medelpunkter tvenne sammanfalla, måste triangeln vara liksidig. För tetraedrar gäller den analoga satsen.

Om i en tetraeder av de tre punkterna tyngdpunkten, om- och inskrivna sfärernas medelpunkter tvenne sammanfalla, måste tetraedern vara likytig och alla tre sammanfalla. För korthets skull kallar jag en tetraeder likytig, då dess fyra sidotrianglar alla ha samma area.

Vi bevisa först, *att en tetraeders sidotrianglar, om de alla ha samma yta, måste vara kongruenta*, så att motstående tetraederkanter äro lika: $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$. De fyra tetraederhöjderna måste nämligen vara lika, låt vara h. Tyngdpunkten T, som ligger på avståndet $\frac{h}{4}$ från alla sidoplan, *är alltså även inskrivna sfärens medelpunkt.* Betecknas tetraedern $ABCD$, delar därför planet ABT vinkeln mellan planen ABC och ABD mitt itu, liksom CDT vinkeln mellan CDA och CDB. T ligger som bekant mittpå PQ, som förenar mittpunkten P till AB och mittpunkten Q till CD. P och T ligga i planet ABT, alltså tillhör hela PQ detta plan. På samma sätt ligger PQ i planet CDT. Följaktligen råkas planen ABT och CDT längs PQ. Emedan $QC=QD$, ligga C och D lika långt från planet ABT på var sin sida om detsamma. Därav följer, då ABT är biss. plan, att C och D ligga i ett mot ABT vinkelrätt plan, som är

parallellt med AB. Den gemensamma normalen till AB och CD, som är vinkelrät mot varje plan, vilket är parallellt med både AB och CD, måste följaktligen ligga i ABT. Då samma normal av analoga skäl ligger i CDT, måste den vara identisk med PQ, som alltså är *mittpunktsnormal* till både AB och CD. Då måste $TA=TB$ och $TC=TD$. Genom cyklisk peumetation erhålles vidare $TB=TC$. Som nu $TA=TB=TC=TD$, *är* T *även den omskrivna sfärens medelpunkt.* Kanterna AB och CD, som gå lika långt från T, äro lika; på samma sätt måste $AC=BD$ och $AD=BC$, varmed satsen är bevisad. Här må anmärkas, att endast spetsvinkliga trianglar kunna förekomma som sidotrianglar i en likytig tetraeder, emedan inskrivna sfärens kontaktpunkt med en sidoyta sammanfaller med medelpunkten till sidotriangelns omskrivna cirkel och den förra punkten enligt sakens natur måste ligga *inom* triangeln. Nedfällas tre sidotrianglar i en likytig tetraeder utåt i den fjärdes plan, uppstår en spetsvinklig triangel, i vilken sidornas mittpunkter utgöra fjärde sidotriangelns hörn. Vi sammanfatta det hittills bevisade så: *I varje likytig tetraeder, d. v. s. varje tetraeder med* $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$ *sammanfalla tyngdpunkten, om- och inskrivna sfärernas medelpunkter.*

Beviset för den ursprungliga satsen uppdela vi nu i tre avdelningar.

1. *Om tyngdpunkten sammanfaller med omskrivna sfärens medelpunkt, är tetraedern likytig.*

Med samma beteckningar som förut inses, att PTQ är mittpunktsnormal till AB och CD. Då därjämte $TP=TQ$, måste $AB=CD$ och på samma sätt $AC=BD$, $AD=BC$.

2. *Om tyngdpunkten sammanfaller med inskrivna sfärens medelpunkt, är tetraedern likytig.* Är sfärens radie r, måste alla tetraederhöjder vara $4r$, varav satsen.

3. *Om inskrivna sfärens medelpunkt sammanfaller med den omskrivnas, är tetradern likytig.* Antag, att den inskrivna sfären tangerar pl. ABC i D_1 och pl. ABD i C_1. Då är $\angle AD_1B=\angle AC_1B$, ty $AD_1=AC_1$ (tangenter till sfären från A) och $BD_1=BC_1$, d. v. s. $\triangle ABD_1\simeq\triangle ABC_1$. Nu äro D_1

och C_1 identiska med de kring resp. trianglar omskrivna cirklarnas medelpunkter och ligga inom sina trianglar. Alltså är

$$\wedge ACB = \wedge ADB = \tfrac{1}{2} \wedge AD_1B.$$

Vi kunna därför beteckna vinklarna i sidotrianglarna med α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, så att α står emot a, β mot b, ..., γ_1 mot c_1, likgiltigt i vilken triangel. Är nu beteckningen så vald, att a, b, c äro sidor i samma triangel, få vi

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_1 + \beta + \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma .$$

Av dessa likheter följer $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$ och slutligen $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$. Sedan är det självklart att sidotrianglarna äro kongruenta alla fyra, ty de äro likformiga och hava omskrivna cirklarnas radier lika.

II.

Vi ha i det föregående funnit, att de gemensamma normalerna p till a och a_1, q till b och b_1, r till c och c_1[1] råkas i samma punkt hos likytiga tetraedrar ($a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$). Det är lätt att påvisa samma egenskap hos s. k. ortocentriska tetraedrar d. v. s. sådana, i vilka $a \perp a_1$, $b \perp b_1$, $c \perp c_1$. Följande sats gäller nämligen: *Om i en tetraeder* $a \perp a_1$ *och* $b \perp b_1$, *så är* $c \perp c_1$ *och normalerna* p, q, r *råkas i samma punkt.* Det första följer ur analytiska rymdgeometriens elementer och identiteten

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_3)(x_4 - x_2) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0,$$

som torde vara onödigt att här utreda. p ligger i normalplanet mot a_1 genom a och i normalplanet mot a genom a_1, q i motsvarande plan genom b och b_1 samt r i motsvarande plan genom c och c_1. Tetraederhöjderna ligga två och två i de sex plan man på detta sätt erhåller (höjderna från a:s ändpunkter t. ex. i det förstnämnda planet).

[1] Med p, q, r förstås i det följande i allmänhet sträckorna mellan normalernas fotpunkter. I fråga om normalernas skärning användes samma beteckning för de räta linjer, som innehålla dessa sträckor.

Då tetraederhöjderna alltså råkas två och två i alla kombinationer och ej ligga i samma plan, *måste de råkas i samma punkt* N, som man kan kalla tetraederns **ortocentrum**. Genom N, som är gemensam för de sex normalplanen, måste även p, q, r gå. Omvänt inser man lätt, att $a \perp a_1$, $b \perp b_1$, $c \perp c_1$, om tetraedern har ett ortocentrum N. Det plan, som innehåller a och N, är nämligen vinkelrätt mot a_1 o. s. v.

Finnes det möjligen ytterligare några tetraedrar, i vilka p, q, r råkas i samma punkt? Svaret på denna fråga ger satsen:

Om de gemensamma normalerna p, q, r till resp. a och a_1, b och b_1, c och c_1 råkas i samma punkt, är tetraedern av någon bland följande typer:

1. $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$ (*likytiga tetraedrar*),
2. $a=a_1=b=b_1$, $c \neq c_1$,
3. $a \perp a_1$, $b \perp b_1$, $c \perp c_1$ (*ortocentriska tetraedrar*).

Anm. Då ortocentriska tetraedrar även karakteriseras av likheterna $a^2+a_1^2=b^2+b_1^2=c^2+c_1^2$,[1] inses att den reguljära tetraedern ingår både under 1 och 3, samt att en tetraeder av typ 2 även är ortocentrisk om $c^2+c_1^2=2a^2$. Om dessa avskiljas från typ 3, äro de tre typerna distinkta.

Vi tänka oss nu en tetraeder $ABCD$ given, i vilken normalerna p till $AB=a$ och $CD=a_1$, q till $BC=b$ och $AD=b_1$, r till $AC=c$ och $BD=c_1$ råkas i samma punkt N, och söka att med stöd av detta antagande intvinga tetraedern under någon av nyssnämnda typer.

Första fallet: p, q, r bilda räta vinklar två och två.

Om tetraederns kanter och hörn nedprojicieras i det av p och q bestämda planet (detta plan kallas hädanefter pq-planet), uppstår en rektangel $A'B'C'D'$ jämte diagonaler. $A'B'$ är projektionen av $AB=a$ o. s. v. $A'B'$ och $C'D'$ äro vinkelräta mot p och gå genom denna normals fotpunkter P_a och P_{a_1} resp. På samma sätt äro $B'C'$ och $D'A'$ vinkel-

[1] $(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2-(x_1-x_3)^2-(x_4-x_2)^2=-2(x_1-x_4)(x_2-x_3)$ o. s. v. Jfr. denna tidskr. årg. 5, sid. 192.

räta mot q och gå genom denna normals fotpunkter Q_b och Q_{b_1} resp. Vi beteckna med n_A, n_B, n_C, n_D normalerna AA', BB', CC', DD' mot pq-planet. Emedan c och c_1 äro vinkelräta mot r, som i sin tur står vinkelrätt mot pq-planet, måste c och c_1 vara parallella med detta plan. Deras gemensamma normal går därför genom projektionernas skärningspunkt d. v. s. *rektangelns centrum, i vilken punkt N därför ligger.* Vi kunna nu rekonstruera vår tetraeder sålunda: Utgående från A på n_A gå vi längs APa, som skär n_B i B, därifrån längs BQ_b, som skär n_C i C, därifrån längs CP_{a_1}, som skär n_D i D, och slutligen längs DQ_{b_1}, som skär n_A i A. Emedan fotpunkterna äro mittpunkterna till resp. rektangelsidor finner man utan vidare $a=a_1$, $b=b_1$; $c=c_1$ följer därur att AC och BD äro parallella med rektangelns diagonaler och gå på avståndet $\frac{r}{2}$ från pq-planet. Denna förutsättning leder alltså till likytiga tetraedrar (typ 1).

Vi kunna tillägga, *att p, q, r hos alla likytiga tetraedrar, men endast hos sådana, äro vinkelräta två och två*, ty denna egenskap finnes ej i de följande fallen och i dessa fall uppträder ingen likytig tetraeder.

Andra fallet: p och q dela varandra mittlu, men äro icke vinkelräta (efter lämpligt val av beteckningen).

Genom samma förfarande som i första fallet erhålles nu en parallellogram $A'B'C'D'$ med dess nu *olika* diagonaler. *N måste ligga i dess centrum.* Jag påstår, att $A'B'C'D'$ är en romb, m. a. o. $p=q$. Först avfärda vi den tänkbara möjligheten att en av fotpunkterna P_a, ..., Q_{b_1} fölle i ett av hörnen A', ..., D' t. ex. P_a *i* B'. Då måste P_{a_1} falla i D', medan Q_b och Q_{b_1} ej kunna falla i hörn. Då måste B ligga i B', C i C', D i D' och A i A', vilket är orimligt. På samma sätt visas alla andra sådana koincidenser leda till orimligheter. I beteckningen XY inlägga vi nu avståndet XY inklusive riktningen $X \rightarrow Y$. Vi räkna sträckor positiva i riktningen $A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow D' \rightarrow A'$ på respektive sidor och avstånden $A'A$, ..., $D'D$ positiva åt samma håll på n_A, ..., n_D.

Då är

$$\frac{A'A}{B'B} = \frac{A'P_a}{B'P_a},$$

$$\frac{B'B}{C'C} = \frac{B'Q_b}{C'Q_b},$$

$$\frac{C'C}{D'D} = \frac{C'P_{a_1}}{D'P_{a_1}} = \frac{A'P_a}{B'P_a}$$

$$\frac{D'D}{A'A} = \frac{D'Q_{b_1}}{A'Q_{b_1}} = \frac{B'Q_b}{C'Q_b},$$

(där alla sträckor äro $\neq 0$).

Därav följer

$$\left\{\frac{A'P_a}{B'P_a} \cdot \frac{B'Q_b}{C'Q_b}\right\}^2 = 1,$$

varav

$$\frac{A'P_a}{B'P_a} \cdot \frac{B'Q_b}{C'Q_b} = \pm 1, \text{ d. v. s. } \frac{A'P_a}{B'P_a} = \pm \frac{C'Q_b}{B'Q_b}.$$

a) $$\frac{A'P_a}{B'P_a} = \frac{C'Q_b}{B'Q_b}.$$

Då är $P_aQ_b \parallel A'C'$. Diametern NB' i cirkeln $NP_aB'Q_b$ delar kordan P_aQ_b mittitu. Som denna korda icke kan vara en diameter, ty då vore vinkeln B' rät mot antagandet, måste $D'NB'$ vara vinkelrät mot P_aQ_b och mot $A'C'$ d. v. s. $A'B'C'D'$ vara en romb och $p=q$. Vidare följer ur ovanstående likhetssystem att för detta fall $A'A=C'C$; $B'B=D'D$. Således är $AC \parallel A'C'$ och $BD \parallel B'D'$ och $c=A'C'$, $c_1=B'D' \neq c$. Dessutom är $a=b=a_1=b_1$. Den gemensamma normalen r är vinkelrät mot både p och q men delas ej mittitu i N. Detta fall leder alltså till typ 2. Tetraedrar av denna typ erhåller man genom att placera två kongruenta likbenta trianglar i rummet så att baserna sammanfalla, medan spetsarnas avstånd ej är lika med basen. Man bevisar utan svårighet att varje sådan tetraeder har en punkt N, sådan att $p=q$, $r \perp p$ och $r \perp q$, samt att N är mittpunkt till p och q, men ej till r.

b) $$\frac{A'P_a}{B'P_a} = -\frac{C'Q_b}{B'Q_b}.$$

Då är $A'A = -C'C$, $B'B = -D'D$. AC och BD skulle alltså råkas i N, vilket är orimligt. Det återstår nu

Tredje fallet: p och q dela ej varandra mittitu och äro ej heller vinkelräta.

Såsom i föregående fall projiciera vi i pq-planet och erhålla parallellogrammen $A'B'C'D'$ med olika diagonaler, i vars centrum N nu med säkerhet icke faller. Falla två fotpunkter i ett hörn t. ex. P_a och Q_b i B', ligger B i B' och då N även ligger i B måste den tredje normalen r även ha en fotpunkt i B. N är alltså gemensam ändpunkt för alla tre normalerna p, q, r. Vi uppskjuta detta falls behandling för att först behandla huvudfallet, då N ej faller i ett tetraederhörn. *Därvidlag faller ingen fotpunkt i någon av punkterna* A', B', C', D' Ty ligger t. ex. P_a i B', ligger Q_b ej i B' och B ligger i B' liksom C i C'. P_{a_1} kan ej falla i C', emedan $A'B'C'D'$ ej är en rektangel och alltså ligger D i D'. BD sammanfaller med $B'D'$. Ligger N utanför $B'D'$, måste r ligga i pq-planet, vilket är omöjligt för en egentlig tetraeder. Ligger åter N på $B'D'$, måste P_{a_1} ligga i D' och då kan Q_{b_1} ej ligga där, emedan vi antaga, att två fotpunkter icke falla i samma hörn. A måste alltså falla i A', vilket även är orimligt, då B och B', C och C', D och D' redan sammanfalla. Nu kunna vi bevisa, att *de tre normalernas fotpunkter alla sex ligga på samma sfär.* Detta är trivialt, om N faller i ett tetraederhörn (den möjlighet, vartill vi senare återkomma). I allmänna fallet behöva vi endast visa, att P_a, P_{a_1}, Q_b, Q_{b_1} ligga på samma cirkel. r kan nämligen ej vara vinkelrät mot både p och q, ty då vore c och c_1 parallella med pq-planet och N måste ligga i centrum till $A'B'C'D'$, vilket ej är fallet. Antag då, att r ej är vinkelrät mot p. Då kunna p och r ej heller dela varandra mittitu, emedan q i så fall vore vinkelrät mot p (och r) (tetraedern av typ 2), vilket strider mot förutsättningen. Som slutligen N ej faller i ett tetraederhörn, måste P_a, P_{a_1},

R_c, R_{c_1} ligga på en cirkel av samma skäl som P_a, P_{a_1}, Q_b, Q_{b_1} göra det. Därav följer *genast*, att alla sex fotpunkterna ligga på samma sfär. Vi bevisa alltså, att P_a, P_{a_1}, Q_b, Q_{b_1} äro koncykliska, och saken är klar. Från centrum O till $A'B'C'D'$ nedfälla vi normalerna mot sidorna som figuren visar. Likaså från N:s symmetripunkt N. Vi fastställa samma positiva riktning för sträckorna som i andra fallet samt införa för korthets skull följande beteckningar:

$$A'U = C'U_1 = p_1, \quad B'V = D'V_1 = q_1, \quad UB' = U_1D' = p_2,$$
$$VC' = V_1A' = q_2, \quad UP_a = \bar{P}_aU = U_1\bar{P}_{a_1} = P_{a_1}U_1 = x,$$
$$VQ_b = \bar{Q}_bV = V_1\bar{Q}_{b_1} = Q_{b_1}V_1 = y.$$

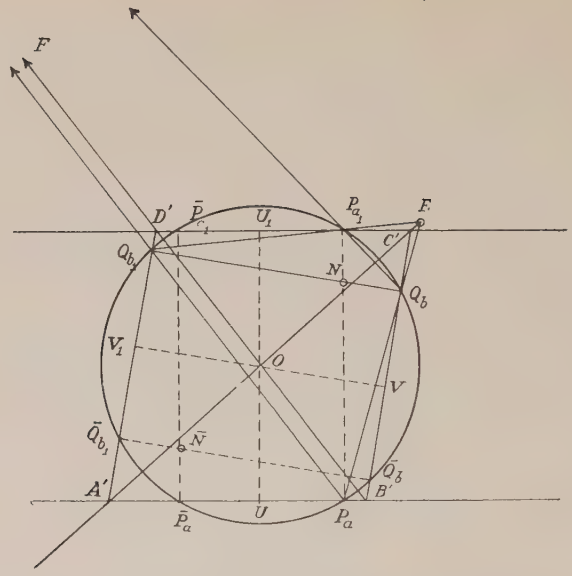
Då är
$$\frac{A'A}{B'\bar{B}} = \frac{A'P_a}{B'\bar{P}_a} = \frac{p_1+x}{-p_2+x},$$
$$\frac{B'B}{C'\bar{C}} = \frac{B'Q_b}{C'\bar{Q}_b} = \frac{q_1+y}{-q_2+y},$$
$$\frac{C'C}{D'\bar{D}} = \frac{C'P_{a_1}}{D'\bar{P}_{a_1}} = \frac{p_1-x}{-p_2-x},$$
och
$$\frac{D'D}{A'\bar{A}} = \frac{D'Q_{b_1}}{A'\bar{Q}_{b_1}} = \frac{q_1-y}{-q_2-y},$$
där ingen sträcka har längden noll.

Genom multiplikation erhålles

$$1 = \frac{(p_1^2-x^2)(q_1^2-y^2)}{(p_2^2-x^2)(q_2^2-y^2)} \text{ eller } \frac{p_2^2-x^2}{p_1^2-x^2} = \frac{q_1^2-y^2}{q_2^2-y^2}$$

eller
$$\frac{p_2^2-x^2}{p_1^2-p_2^2} = \frac{q_1^2-y^2}{q_2^2-q_1^2}.$$

Om $OA'=e$, $OB'=f$, är emellertid $p_1^2-p_2^2=q_2^2-q_1^2=e^2-f^2\neq 0$, och således måste $p_2^2-x^2=q_1^2-y^2$ (samt $p_1^2-x^2=q_2^2-y^2$) d. v. s. $B'P_a\cdot B'\bar{P}_a = B'Q_b\cdot B'\bar{Q}_b$. Detta innebär just, att P_a, $\bar{P}_a$, Q_b, $\bar{Q}_b$ ligga på samma cirkel, som tydligen har sitt centrum i O och alltså går även genom



de andra fyra fotpunkterna. Detta gäller även för $x=y=o$ (d. v. s. om N faller i O), och ger då $p=q$, som vi på annat sätt funnit i *andra fallet*.

I detta bevis ha vi aldrig begagnat oss av att r går genom N utan endast utnyttjat den omständigheten att *kretsloppet* $AP_aBQ_bCP_{a_1}DQ_{b_1}A$ *är slutet* så att denna figur är en skev 4-hörning $ABCD$. Man ser lätt att motsvarande kretslopp med utgående från en *godtycklig* punkt A^* på n_A alltid leder tillbaka till A^* igen så snart det gör det för en punkt utom A'. Det finnes alltså oändligt många tetraedrar med normalerna p till a och a_1, q till b och b_1, då dessa normaler råkas och ändpunkterna ligga på en cirkel. *I alla dessa tetraedrar går* A^*C^* *genom skärningspunkten* E *mellan* P_aQ_b *och* $P_{a_1}Q_{b_1}$, *som alltså ligger på* $A'C'$ (ev. ∞ långt bort) *liksom* B^*D^* *går genom skärningspunkten* F mellan $P_aQ_{b_1}$ och $Q_bP_{a_1}$, som alltså ligger på $B'D'$. N, E, F äro centra i de tre sönderfallande kägelsnitten genom P_a, Q_b, P_{a_1}, Q_{b_1} och hörn i en polartriangel till varje annat kägelsnitt genom dessa punkter, bl. a. den cirkel vi ovan

funnit. O är ortocentrum i denna triangel, d. v. s. $EN \perp OF$ och $FN \perp OE$. Då N ej ligger i O, kan N:s polar EF ej falla oändligt långt bort d. v. s. endast en av punkterna E och F kan falla på ∞-linjen. Om EN skär FO i F_1 och FN EO i E_1, ligga E, F, E_1, F_1 på samma cirkel (σ'), som skär cirkeln (σ) genom $P_a, \ldots, Q_{b_1}$ under räta vinklar. Faller t. ex. E oändligt långt bort måste N ligga på OF och diagonalerna $A'C'$, $B'D'$ äro vinkelräta. Då degenererar σ' i diametern $B'D'$ till σ.

Bland tetraederna $A^*B^*C^*D^*$ finnas två — och endast två — för vilka den gemensamma normalen r^* till A^*C^* och B^*D^* går genom N, nämligen den givna $ABCD$ och den, som är symmetrisk med denna i förhållande till pq-planet. Detta inses t. ex. sålunda:

1. EA^*C^* bestämmer, till följd av konstruktionens lineära karaktär, entydigt FB^*D^* och vice versa. Fixeras dessa linjer medels de sträckor h, k de avskära på normalen n_O mot pq-planet i O, från O räknade, måste dessa alltså ha ett lineo-lineärt samband, vilket för övrigt är av formen $h : k = \text{konst.}$, emedan $h = o$, $h = \infty$ tydligen motsvara $k = o$ resp. $k = \infty$.

2. För att r^* skall gå genom N fordras att h och k satisfiera en ekv. av typen $hk = \text{konst}$. Om jag väljer EA^*C^* godtyckligt, finnes endast en linje FB^*D^* sådan att r^* går genom N och omvänt. (Naturligtvis går då A^*B^* i allmänhet ej genom P_a o. s. v. Därför fordras ju att $h : k = \text{konst.}$) Antag att jag funnit en linje FB^*D^* med denna egenskap. r^*:s fotpunkt på EA^*C^* ligger på den cirkel som planet EA^*O utskär på sfären med diametern NE. Denna cirkel (I) har diametern EE_1 och tillhör den sfär Σ', till vilken σ' är en storcirkel. På denna sfär ligger ock den motsvarande cirkeln (II) med diametern FF', som innehåller r^*:s fotpunkt på FB^*D^*. Faller E på ∞-linjen, övergår den första cirkeln i n_O. r^* är en gemensam generatris till de bägge konen, som ha sin spets i N och gå genom I och II resp. *Dessa koner äro identiska.* Ty pq-planet är symmetriplan till bägge och de i detta plan belägna generatriserna NE och NF äro

gemensamma. Då dessutom den första konen t. ex. skär Σ' längs I, måste resten av skärningen även vara en cirkel och av symmetriskäl just II. Man inser nu omedelbart, att varje EA^*C^* har sin entydigt bestämda tillhörande FB^*D^* och omvänt. Som $h=o$, $h=\infty$ tydligen motsvara $k=\infty$ resp. $k=o$, måste det lineo-lineära sambandet $\alpha hk+\beta h+\gamma k+\delta=o$ vara av påstådd form. Detta gäller även, då N faller på en diagonal. Då det slutligen endast finnas två lösningar till systemet

$$\left.\begin{aligned} h:k &= \text{konst.} \\ hk &= \text{konst.} \end{aligned}\right\}$$

är satsen bevisad.

Nu konstatera vi, *att det bland tetraedrarna $A^*B^*C^*D^*$ finnas tvenne ortocentriska.* I dessa råkas p, q och r^* i N. De måste därför vara identiska med de redan funna med denna egenskap, då antalet tetraedrar $A^*B^*C^*D^*$, i vilka p, q, r^* råkas i N, äro två och *alltså är $ABCD$ ortocentrisk.*

För att A^*B^* skall vara $\perp C^*D^*$ fordras

$$\frac{A'A^* \cdot C'C^*}{A'P_a \cdot C'P_{a_1}} = 1 .$$

Då förhållandet $A'A^* : C'C^*$ är konstant, ger detta två värden på $A'A^*$ och de två tillhörande tetraedrarna äro symmetriska med avseende på pq-planet. Samtidigt är

$$\frac{B'B^* \cdot D'D^*}{B'P_a \cdot D'P_{a_1}} = 1 ,$$

ty detta är endast ett annat sätt att uttrycka ortogonaliteten i fråga. Emellertid är $B'P_a \cdot D'P_{a_1} = B'P_a \cdot B'\bar{P}_a = B'Q_b \cdot B'Q_b = = B'Q_b \cdot D'Q_{b_1}$ och således gäller samtidigt med sista ekv. även

$$\frac{B'B^* \cdot D^*}{B'Q_b \cdot D'Q_{b_1}} = 1 ,$$

d. v. s. B^*C^* är vinkelrät mot D^*A^*. Då måste även A^*C^* och B^*D^* vara vinkelräta och de bägge tetraedrarna äro ortocentriska.

Vårt tredje fall leder alltså till ortocentriska tetraedrar (typ 3), då N ej faller i ett tetraederhörn. Det återstår att bevisa ortocentriciteten även hos sådana tetraedrar. Vi låta då N kontinuerligt närma sig B'; cirkeln $P_aQ_bP_{a_1}Q_{b_1}$ tenderar mot den cirkel, som har diametern $B'D'$. P_aQ_b och $P_{a_1}Q_{b_1}$ råkas alltjämt i en punkt på $A'C'$. Då N, P_a och Q_b sammanfalla i B' har man anledning förmoda, att $P_{a_1}Q_{b_1}$ och tangenten till cirkeln $B'P_{a_1}Q_{b_1}$ i B', d. v. s. normalen mot $B'D'$ i B' råkas i en punkt E på $A'C'$, vilket man verifierar med enkla räkningar. Om $ABCD$ är tillhörande tetraeder, går AC genom E medan B och F ligga i B'. Normalplanet mot BD i B innehåller normalen r och dessutom BE. Alltså innehåller detta plan hela AC och BD AC. Detta skulle ej med nödvändighet följa, om r fölle längs BE, men de tre normalerna kunna ej ligga i samma plan. Då r ej är vinkelrät mot både p och q,[1] kan på samma sätt bevisas, att ytterligare ett par motstående kanter äro vinkelräta och *alltså äro även hithörande tetraedrar ortocentriska.*

Våra tre fall uttömma alla möjliga konfigurationer av tre sträckor genom en punkt, som kunna vara normalerna p, q, r i en egentlig tetraeder och alltså finnas inga andra tetraedrar, i vilka de tre gemensamma normalerna till motstående sidor råkas i samma punkt än de tre typerna 1, 2, 3.

[1] I så fall fölle N i O och ej i B'.

Det stereoskopiska seendets natur och dess nyaste användningar.

Av ARVID ODENCRANTS.

Vår avståndsuppfattning stöder sig på många olika omständigheter, delvis beroende på observation av utom vår kontroll liggande fakta, delvis på rent fysiologiska möjligheter. Till de förra räknas sådana omständigheter som luftens med avståndet växande ogenomskinlighet, skuggor och dagerförhållanden, avlägsnare föremåls bortskymmande genom närbelägna, etc.

Till de senare räkna vi sådana som bero på våra synorgan. Först bör då nämnas uppskattningen av föremål med bekanta dimensioner — vanligen genom att man successivt fixerar punkter på bekant distans från varandra och ur den vinkel, ögat därvid måste vridas, uppskattar avståndet till föremålet. Av helt annan art äro de som grunda sig på det binokulära seendet.

När vi fixera ett på stort avstånd beläget föremål, inställas ögonaxlarna parallellt; flytta vi sedan blicken till ett mera närbeläget objekt, inställas axlarna i en viss konvergensvinkel, vilken vi kunna i någon mån uppskatta. Detta ger oss en *absolut* avståndsbedömning. Men samtidigt fordrar övergången från en konvergensvinkel hos ögonaxlarna till en annan en viss ansträngning, vilken i sin ordning möjliggör en *relativ* avståndsuppskattning.

Men detta är ej vår enda, eller ens vår huvudsakliga bedömningsmetod. Försök hava nämligen utförts som visa, att det ömsesidiga läget hos två föremål kan bestämmas dels med så korta observationstider, att axelkonvergensen ej hinner ändras därunder, dels även enbart med ledning

av efterbilderna på näthinnan. Något i dennas konstruktion måste således vara bestämmande.

Man har även — som Pulfrich framhåller i sitt intressanta arbete »Stereoskopisches Sehen und Messen» — kommit till åsikten, att om man fixerar ett föremål, beläget på visst avstånd, det finnes en viss yta i rymden, kallad horoptern, vilkens alla punkter karakteriseras av att de på båda ögonens näthinnor avbildas i korresponderande punkter. Varje utom denna yta belägen punkt avbildas olika, beroende på om den ligger närmare eller längre bort än horoptern, vilken på större avstånd representerar en tämligen plan yta. Och denna olika orientering å näthinnan omsätta vi direkt i relativ avståndsuppfattning, utan egentlig eftertanke.

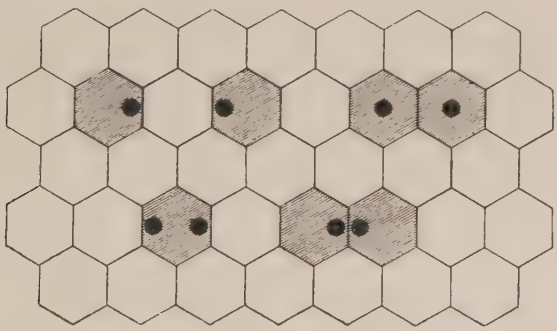


Fig. 1. Korresponderande lägen hos bildpunkter, som kunna urskiljas enligt äldre (övre raden) och nyare uppfattning (den nedre). I förra fallet kunna de skiljas i alla, i det senare blott i vissa lägen hos ögonen.

Noggrannheten härav är mycket stor och betingas av storleken hos ögonbottnens perceptionselement. Dessa motsvara i föremålsrymden en vinkel av c:a en bågminut, och tidigare, då man ansåg nödvändigt för differentiering i avstånd, att de båda bildpunkternas lägen *alltid* föllo i skilda element, blev denna vinkel bestämmande (fig. 1, övre raden). Nyare undersökningar hava emellertid visat, att man kan uppfatta skillnad i läge, om blott de båda punkterna i något ögats läge falla inom ej motsvarande element (fig. 1, nedre

raden); undersökningar som utförts efter Pulfrichs metoder hava visat huru vissa observatörer kunna gå ända ned under tio bågsekunder.

Det stereoskopiska seendet innebär således en ytterst känslig metod, men dess noggrannhet är starkt beroende på avståndet, och avtager med dess kvadrat. Som en gräns för dess fungerande har man, med antagande av ett högt och således ogynnsamt värde på gränsvinkeln (en halv bågminut) och med ett normalvärde på ögonavståndet av 63 mm, kunnat sätta c:a 450 meter. Alla föremål bortom denna distans äro för oss belägna i ett plan, såväl i vad angår konvergensvinkeln som det egentliga stereoskopiska seendet, ehuru vi naturligtvis genom andra metoder kunna skapa oss en uppfattning om deras orter.

Emellertid har man även möjligheter att öka det binokulära seendets noggrannhet. Undersöker man de geometriska betingelserna därför, ser man att gränsavståndet är proportionellt mot basen — i detta fall ögonavståndet — och omvänt proportionellt mot gränsvinkeln. Det senare kan man utnyttja genom förstorande optiska kombinationer, vilka transformera upp en mindre vinkel i föremålsrymden till gränsvinkeln i ögat; det förra genom att medelst spegelanordningar eller liknande öka den effektiva basen. Exempel på båda delarna har man i en vanlig prismakikare.

Men deras verkan är ej fullt likartad. Då man betraktar ett bildpar, upptaget med stor bas, eller då man i prismakikaren har objektiven med större avstånd än okularens = ögonens, är resultatet att man ser en modell, förminskad i skalan ögonavstånd : baslängd, på ett i samma grad förminskat betraktningsavstånd. Proportionerna äro således oförändrade, medan däremot förmågan att uppfatta avståndet ökats; den växer kvadratiskt med avståndets minskning, och minskas direkt med »modellens» skala; slutresultatet är således en stegring i förhållandet bas : ögonavstånd.

Matematiskt kan detta uttryckas så, att om Z är avståndet,

Δ den vinkel — alltid liten — under vilken basen B synes på detta avstånd, kan man sätta $Z = B : \Delta$. Avståndsfelet är då

$$dZ = \frac{B}{\Delta^2} \cdot d\Delta = \frac{Z}{\Delta} \cdot d\Delta = \frac{Z^2}{B} \cdot d\Delta .$$

$d\Delta$ är den fysiologiskt betingade gränsvinkeln, vilken man kan — med en betydlig säkerhetsmarginal — sätta $= {}^1{}_2$ bågminut $= \frac{1}{7000}$. Av det andra uttrycket för dZ följer att för $\Delta = d\Delta$ upphör all avståndsbedömning; det motsvarar »området för stereoskopiskt seende» och avståndet $Z =$ c:a 450 m.

Det sista uttrycket visar, att det absoluta felet i avståndsbedömningen växer med kvadraten på avståndet, men det relativa (dZ/Z) direkt därmed, samt att felet är — som förut åskådliggjorts — proportionellt mot $d\Delta$, omvänt proportionellt mot B.

Förstoringens inflytande är helt annat; där påverkas enbart uppfattningen av djupet i bilden, medan dimensionerna i sidled ej ändras. Resultatet blir en kulissliknande

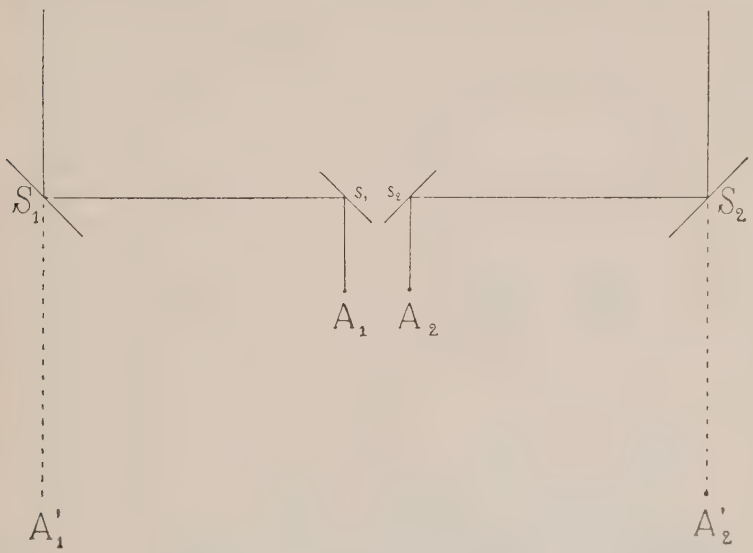


Fig. 2. Telestereoskopets princip: s_1, s_2, S_1, S_2 speglar; A_1 och A_2 ögonens verkliga, A_1' och A_2' deras virtuella orter.

effekt, vilken lätt kan iakttagas, om man med en ej för svag dubbelkikare betraktar ett synfält, vari några utpräglade och ej för stora avstånd förekomma.

Vill man demonstrera *båda* dessa förhållanden, kan det, som redan framhållits, göras med en prismakikare. Än bättre kan det emellertid ske med Helmholtz' telestereoskop — en enkel kombination av fyra speglar, som fig. 2 visar. De två inre hava ett efter ögonbasen — i medeltal 63 mm — lämpat avstånd, de yttre böra kunna förskjutas symmetriskt till de inre. Med en vanlig teaterkikare kan man sedan införa förstoringen av $d\Delta$.

Praktisk betydelse ur mätsynpunkt fingo dessa iakttagelser genom det av Berliningenjören H. de Groussiliers föreslagna »vandrande märket». Om vi i vardera ögats synfält införa ett identiskt lika märke, se vi dem vid binokulärt seende som ett. Äro de då anbragta på ögonavståndet, betraktas de med parallella ögonaxlar, och vi förlägga dem då till »oändligt», d. v. s. utom det stereoskopiska seendets område. Minska vi avståndet dem emellan genom att t. ex. närma det högra märket till det vänstra, se vi märkenas

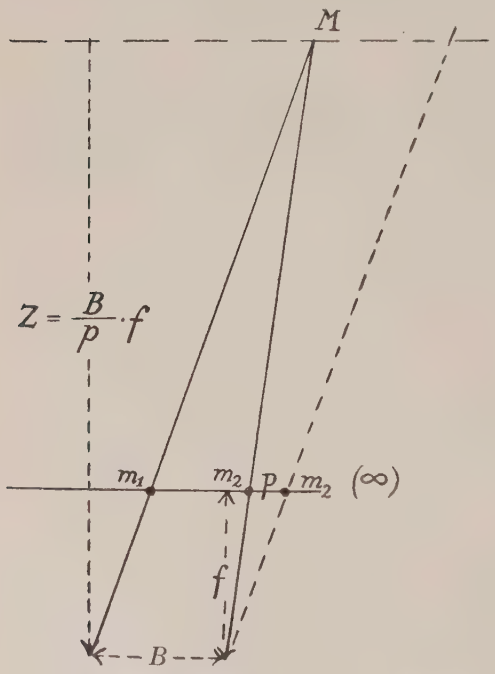


Fig. 3. Avståndsbestämning med det vandrande märket. Z är avståndet, f bränvidden, m_1 och m_2 märkenas lägen, m_2 (∞) motsvarande för parallella axlar (oändligt avstånd). Då är $Z : f = B : p$, där $p = m_2 - m_2$ (∞) kallas parallaxen.

bild närma sig till oss i den synlinje, som bestämmes av blickriktningen till det vänstra märket, och kunna ur de geometriska betingelserna, som fig. 3 visar, definiera det avstånd, till vilket vi förlägga märket. Man kan då antingen ha ett fast och ett rörligt märke, eller en serie av parvis anordnade märken med olika avstånd inom varje par. Anbringas dessa i synfältet hos en kikare, eventuellt med starkt ökat objektivavstånd, har man den konstruktion, som ligger till grund för de stereoskopiska avståndsmätarna.

Men man är ej inskränkt till att, som i dessa, blott betrakta naturen direkt. Denna kan ersättas med under korrekta förhållanden upptagna och betraktade stereoskopiska fotografier. När dessa betraktas från ett avstånd = bildvidden, har man på grund av det fotografiska centralperspektivets natur samma blickriktningar som vid direkt betraktande. Införes då i synfältet ett vandrande märke, kan detta injusteras att sammanfalla med en viss bildpunkt. Fig. 3 visar även huru då avståndet kan beräknas. En sådan inställning kan med hjälp av det stereoskopiska seendet utföras synnerligen noggrant. Man har då bildpunktens koordinater i ena — vanligen den vänstra — bilden samt skillnaden mellan abscissorna, parallaxen, som mätgrunder.

Detta har funnit stor praktisk användning på olika områden, från antropologi till astronomi, men speciellt inom kartografien. Där har en hel serie av instrument utarbetats — stereomikrometern för demonstration av metoden, stereometern för avstånd under tio meter, stereokomparatorn för större. Härtill komma fotografiapparater, lämpade för de olika bearbetningsmetoderna, på senare tid även för fotografering från luften.

Med dessa rena mätapparater hava även kombinerats anordningar för direkt projektion i planet av de erhållna resultaten. För arbete från marken har man stereoautografen, vilken genom ett system av hävstänger direkt omsätter de inställda koordinatvärdena i kartkoordinater. Och dessa instrument hava sedan på olika sätt ombildats för de

speciella förhållanden, då luftbilder användas som underlag för mätningen.

I de sista instrumenttyperna dragas kontinuerliga kurvor genom att man låter det vandrande märket följa terrängen på olika sätt. Det visade sig då, att, om detta fick ske hastigt, man ej vid fram- och återgång fick exakt samma kurva — ett förhållande, som naturligtvis måste noga utredas och som ledde till nya, intressanta resultat och en helt ny klass av mätapparater, som kunde betecknas som stereofotometriska.

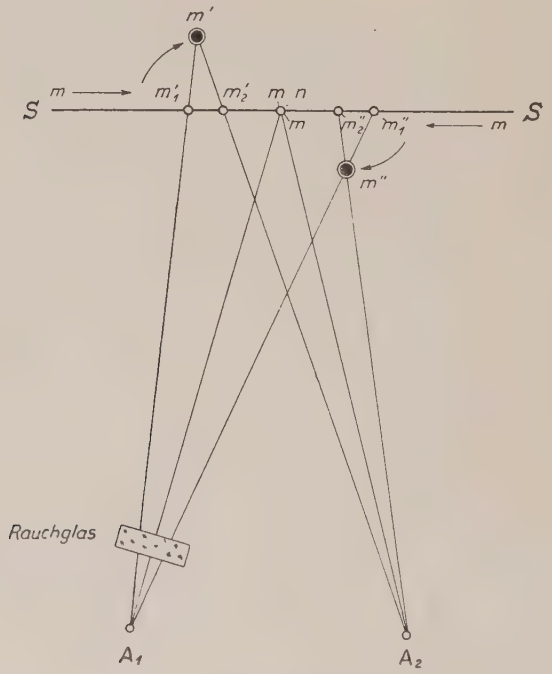


Fig. 4. Konstruktion av bildläget vid betraktande av ett oscillerande märke.

Principen för dessa och grunden till de konstaterade felen synes enklast av fig. 4. Ett ljusintryck som träffar vårt öga fordrar en viss tid för att omsättas i förnimmelse. I det ögonblick, då den rörliga punkten befinner sig i *m*,

se vi den med ögat i ett tidigare läge; vilket detta är, bestämmes av ljusintensiteten. Fig. visar denna olika för de två ögonen, genom att ett ljusfiltrum inskjutits framför det vänstra. Vi se då punkten med höger öga i läget m_2', resp. m_2'' med vänstra i det ännu tidigare läget m_1', resp. m_1''. Då orientera vi punkten till de orter m' och m'', där de två synriktningarna skära varandra. Rör den sig således längs en linje — i det tecknade fallet oscillerande om ett mittläge — se vi den ej följa linjen utan beskriva en ellips omkring den, vilkens excentricitet beror på ljusfiltrets beskaffenhet; ju svagare detta är, desto mera närmar sig ellipsen den räta linjen.

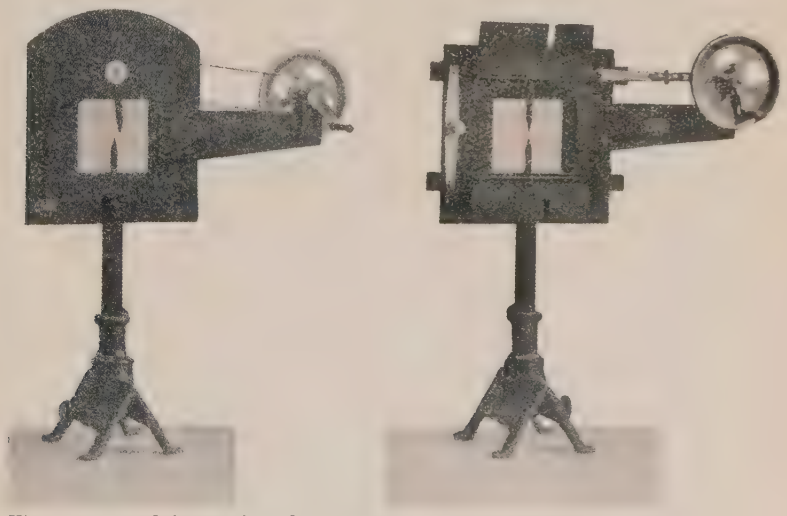


Fig. 5. Anordningar för demonstration av stereoeffekten med roterande (t. v.) och med oscillerande märke (t. h.). (Zeiss).

Försöket kan utföras på olika sätt. Enklast tar man två spetsiga föremål, t. ex. pennor, lägger dem mot en fönsterruta eller mot ett vitt papper, håller den ena stilla och rör den andra fram och tillbaka under den. I mera fullkomnad form kunna apparater, liknande dem å fig. 5, användas. Vill man visa försöket för ett större auditorium, insättes dessa eller liknande i en projektionsapparat, och åskådarna

förses med ljusfiltra, t. ex. stycken av svagt belysta och sedan framkallade fotografiska plåtar.

Försöket kan nu varieras på flera sätt. Med gråfiltra av olika täthet, eller med gråkilar, kan man variera skillnaden i intensitet och därmed ellipsens form; den visar sig vara ett ytterst känsligt reagens på skillnad i ljusstyrka, t. o. m. så, att den kan tjäna till ögonundersökningar. Flyttar man över gråfiltret till andra ögat, kastas rörelseriktningen i ellipsen om. Ersätter man det neutralgråa filtret med färgfiltra, får man fortfarande fram ellipsen.

Med detta har effektens betydelse i hög grad ökats. Enligt de undersökningar, som jag hittills sett, synes nämligen i detta fall begreppet intensitet kunna skiljas från det rena färgbegreppet, så att man utan svårighet kan med varandra jämföra två olika färger. Detta är ju den heterokroma fotometriens problem, vilket hittills berett de största svårigheter. Pulfrich definierar nu lika intensiteter hos färgat ljus som de, vilka — under i övrigt lika omständigheter — ej låta ellipseffekten framträda. Om detta är exakt riktigt, kan man knappast säga; men vare sig det är så eller ej, har man genom denna effekt fått en metod, som tillåter att direkt med varandra jämföra olika våglängder och våglängdskomplexer. Om en eller annan korrektion kan behöva insättas, får den vidare forskningen avgöra.

Principen har nu av Pulfrich använts till fotometerapparater av olika slag, för direkt eller spektralarbete. I dessa har det enkla, rörliga märket ersatts med ett dubbelt, som betraktas binokulärt. »Spektralstereofotometern» kan genom de dispergerande prismornas utbyte mot ej dispergerande även användas för vanlig fotometri, resp. om blott ett prisma utbytes, för jämförelse mellan vitt och olika färger. Intensiteten varieras i dessa apparater genom avbländning av strålknippet.

En intressant undersökning som härmed utförts är ett genommätande av spektrum för att finna dess visuella intensiteter och därmed konstatera ögats verkliga känslighet för olika våglängder. Man bestämmer först en känslighets-

kurva i spektrum från en viss ljuskälla, reducerar denna till normalspektrum, och ställer den sedan i relation till energifördelningen hos den använda ljuskällan på olika våglängder. En hel del andra användningar föreslås av prof. Pulfrich — inom pyrometrien, för undersökningar och för mätningar av färgblinda, för andra ögonundersökningar.

Han framhåller vidare att han som fysiker framlägger denna effekt och dessa apparater; det blir sedan fysiologernas sak att ur färgteoriernas synpunkt och genom försök utreda, *om* utgångshypotesen kan anses grundad.

Är det så, att färgen, eller som Helmholtz uttryckte det, »Farbenglut» kan anses vara en från ljusstyrkan, Helmholtz' Helligkeit, skild faktor, så har man i denna arbetsmetod ett fotometriskt hjälpmedel av oskattbart värde. Skulle det ej vara så, torde man böra anse den som ett sätt att i olika färgat ljus konstatera en lika effekt, överlägset i skärpa alla hittills använda, men förenat med den verkliga intensiteten med en mellanfaktor, som vi få inrikta oss på att bestämma. För olika intensiteter av vitt eller lika färgat ljus synes den i varje fall vara av stort värde.

Huru än detta kommer att utfalla, har prof. Pulfrich med dessa apparater fogat en ny och mycket värdefull länk till den serie av stereoskopiska apparater, som han förut konstruerat, och vi hava allt skäl att söka vinna närmare kännedom därom. Den stereoskopiska principen, såväl i avbildning som i mätning, har hos oss vunnit alltför litet beaktande; om detta referat kunde bidraga till att väcka intresse därför och främja dess användning, skulle å ena sidan det fotografiska bildmaterial, vi samla, betydligt ökas i värde, å den andra en ny och effektiv mätmetod tillföras våra olika arbetsområden.

Litteratur:

C. Pulfrich, Stereoskopisches Sehen und Messen. Jena, Fischer, 1911.
——, Die Stereoskopie im Dienste der Photometrie und Pyrometrie. Berlin, Julius Springer, 1923.

Om atomernas sönderspräng ning.

Av EVA RAMSTEDT.

»Atomerna äro små, kompakta och odelbara, varje atomslag kännetecknas av bestämda egenskaper, bestämd storlek och framför allt av bestämd atomvikt.» Så uppfattades atomerna av atomteorins grundläggare, Dalton, och denna åsikt har varit förhärskande ända till för ett par tiotal år sedan.

Visserligen framställde engelsmannen Prout år 1815 hypotesen, att alla ämnen vore uppbyggda av en och samma ursubstans, väte. Men då de under 1800-talet utförda noggranna atomviktsbestämningarna visade, att i många fall atomvikterna ej kunde anses vara hela multipler av vätets atomvikt, förföll denna tanke.

De vid slutet av nämnda århundrade gjorda upptäckterna, dels av fritt existerande elektroner, dels av de radioaktiva ämnenas förmåga att i α- och β-strålar utsända positivt och negativt laddade partiklar, gåvo vid handen, att atomen måste innehålla delar av olika laddning. Sedermera har studiet av olika strålslags och särskilt α-strålarnas förhållande vid genomgång av materia givit möjlighet att beräkna dessa laddningars storlek och anordning.

På grund av sin stora energi tränga α-partiklarna i vanliga fall rakt genom de atomer de möta på sin väg, utan att märkbart avböjas ur sin ursprungliga rätliniga bana. Endast i mycket enstaka fall, 1 gång på 100000 α-partiklar, sker en avböjning, som då kan vara synnerligen kraftig till och med överskrida en rät vinkel. Med stöd härav uppställde Rutherford sin bekanta kärnmodell för atomens struktur. I den lilla positivt laddade kärnan, vars dimensioner äro av storleksordning 0,0001 av hela atomen,

är atomens massa koncentrerad. Kring kärnan kretsa i slutna ringar negativt laddade elektroner till ett antal så stort, att deras sammanlagda laddning neutraliserar kärnans positiva laddning. Tätt intill kärnan är det elektriska fältet oerhört starkt, så att då den positivt laddade α-partikeln någon enstaka gång tränger fram till kärnans omedelbara närhet, böjes den våldsamt åt sidan. Uppmätning av avböjningens storlek för olika element liksom Moseleys undersökningar av elementens karakteristiska röntgenspektra ange, att antalet elementarladdningar (e) i kärnan är lika stort som elementets atomnummer, d. v. s. det nummer ämnena få, då de tagas i följd i det periodiska systemet, så att väte får nummer 1, helium 2, litium 3 ända upp till uran 92. Riktigheten härav har bekräftats genom nyligen av Chadwick företagna noggranna mätningar på kärnladdningens storlek, vilka givit för platina, silver och koppar (atomnummer 78, 47 och 39) resp. 77,4e, 46,3e och 39,3e.

Det är alltså kärnladdningen och icke atomvikten, som bestämmer atomens natur. På kärnladdningens storlek beror antalet elektroner, på detta anordningen i olika ringar, vilken i sin tur bestämmer atomens flesta egenskaper. Särskilt har sambandet mellan elektronanordningen och ämnenas olika spektra som bekant på ett glänsande sätt utvecklats av prof. Niels Bohr i Köpenhamn och andra framstående forskare.

Genom yttre påverkan kan atomen förlora en eller flera elektroner, återstoden bildar då en positiv jon. Denna har benägenhet att åter uppta de förlorade elektronerna, ofta under utsändande av någon form av strålning, varigenom atomen återgår till sitt begynnelsetillstånd. En sådan elektronförlust betecknar alltså ingen verklig förändring hos atomen.

Av annan natur är den omvandling, som försiggår i atomen vid de radioaktiva ämnenas sönderfall. Då övergår atomen till en atom av annat slag, med annat atomnummer och med de egenskaper, som svara mot detta.

En sådan atomomvandling måste äga rum i själva atomens kärna. Där försiggår alltså det, som alkemisterna strävade att åstadkomma, nämligen en förvandling av ett ämne till ett annat. Men hos de radioaktiva ämnena sker denna förvandling spontant med en för varje ämne karakteristisk hastighet, som ej influeras av något medel, ej av temperatur eller tryck, ej av kraftiga elektriska urladdningar eller starka magnetiska fält, ej ens av ett intensivt bombardemang av α-partiklar. Orsaken till omvandlingen ligger i atomen själv, i en inre instabilitet hos kärnan, som efter vad man ännu känner, endast uppträder hos de tyngsta atomerna samt sannolikt även hos kalium och rubidium.

De energimängder, som utsändas vid dessa processer, äro enorma i jämförelse med dem vi annars förfoga över. α-partiklarna från ett radiumpreparat ha en hastighet av 10 tusen mil i sekunden, en hastighet som är 20 tusen gånger större än en vanlig bösskulas. I förhållande till massan är energin hos en α-partikel 400 miljoner gånger större än en sådan kulas.

Detta ger en antydan om de kolossala energimängder, som finnas i atomens inre och som spontant frigöras vid en radioaktiv omvandling, men på samma gång om de stora energimängder, som äro nödvändiga för att *åvägabringa* en atomsönderspränging.

Vid en del tillfällen har man trott sig kunna konstatera en atomförvandling. Så har Collie iakttagit bildning av helium och neon vid kraftiga elektriska urladdningar i vätgas och Ramsay bildning av neon i vatten, som utsatts för radiumemanation, samt av litium i kopparsulfat under liknande betingelser. Företagna kontrollundersökningar antyda emellertid, att fenomenet berott på föroreningar. På denna väg har alltså ej något positivt resultat vunnits.

Det finns dock fakta, som peka på möjligheten att kunna åstadkomma en atomsönderdelning om ock i mycket liten skala. Av de radioaktiva processerna framgår, att kärnan innehåller diskreta delar, som utsändas i form av α- och β-partiklar, d. v. s. positivt laddade heliumatomer

eller heliumkärnor och elektroner. De av Aston företagna undersökningarna över grundämnenas mass-spektra (se denna tidskr. Årg. 4, s. 176, 1921), som nu omfatta ett stort antal kemiska element, ha ådagalagt, att varje enkel atomarts massa inom försöksfelen uttryckes genom ett helt tal, vilket antyder, att alla atomer äro uppbyggda av partiklar av massan 1.

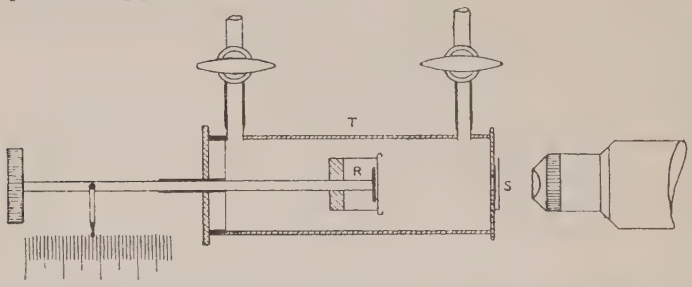
Innehåller nu kärnan sådana enklare beståndsdelar, vore det tänkbart, att just α-partiklarna med sin oerhört koncentrerade energi skulle kunna icke blott tränga genom det yttre elektronhöljet fram mot kärnan, utan även vid sammanstöten med kärnan kunna ur denna utkasta någon av dess beståndsdelar. På detta sätt har också den kände stormannen på radiologins område, Sir Ernest Rutherford uppnått epokgörande resultat,[1] för vilka här något närmare skall redogöras.

Om en α-partikel kommer i omedelbar närhet av en atoms kärna, lider den, som förut nämnts, en kraftig avböjning, men samtidigt sättes också den påstötta atomen i rörelse. Enligt lagen för stöt mellan två elastiska kroppar blir den påkörda atomens hastighet större, ju mindre dess massa är. Under antagande att α-partikeln liksom atomkärnan i fråga är punktformig och att Coulombs lag gäller för laddningar intill de minsta avstånd, har Darwin beräknat olika atommassors hastighet och fördelning i olika riktningar. I enlighet härmed kan en väteatom i gynnsammaste fall, vid central stöt, få en hastighet, som är 1,6 gånger så stor som den träffande α-partikeln, motsvarande en energi = 0,64 av α-partikelns. Om man antar att samma lag gäller för dessa »snabba» atomer som för α-partiklar, är den väglängd, som atomen tillryggalägger, proportionell mot tredje dignitetен på hastigheten, alltså för en väteatom 4 gånger så stor som α-partikelns väglängd.

Rutherfords första undersökning gällde just verifierandet av stötlagarna vid α-partiklarnas sammanstöt med väteatomer.

[1] Phil. Mag. (6), 37 s. 537—587 (1919); 42 s. 809 (1921); 44 s. 417 (1922); Nature 109, s. 584 o. 614 (1922).

Den använda apparaten (se figuren) bestod i sin sedermera något modifierade form av en mässingscylinder T, 3 cm i diameter, sluten i båda ändar medelst plana plattor. Genom den ena kunde en mässingsstav lufttätt föras fram och tillbaka utefter en skala. Vid R insattes en platta, 1 cm i diameter, belagd med det radioaktiva ämnet, vanligen RaC, vars α-partiklar i luft av 15° ha en maximiväglängd eller räckvidd av nära 7 cm. I den andra plattan var mittför preparatet upptaget ett fönster, 5,5 mm i diameter, slutet



med ett tunt metallblad, vanligen av silver, i absorptionsförmåga för α-partiklarna motsvarande 4—6 cm luft. En skärm S med zinksulfid, som iakttogs med ett mikroskop, sattes utanför röret med den belagda sidan mot silverplattan, på 1,3 mm avstånd från denna. I mellanrummet kunde absorberande blad av glimmer inskjutas. Medelst två avledningsrör leddes gas av önskat slag genom apparaten. Ett magnetfält, applicerat vinkelrätt mot cylinderns längdriktning, avböjde störande β-strålar.

Rutherford placerade den aktiva plattan så långt från fönstret, att de utsända α-partiklarna fullständigt absorberades av gasen och silverbladet och således ej kunde ge upphov till några scintillationer på zinksulfiden. Icke dess mindre iakttogs, då α-partiklarna passerade vätgas, en hel del svaga scintillationer, som måste härröra från de av α-partiklarna påstötta väteatomerna. Undersökningar i ett magnetfält visade, att dessa partiklar voro positivt laddade och sålunda utgjordes av vätekärnor.

Sattes absorberande glimmerblad framför zinksulfidskär-

men, avtogo scintillationerna i antal och försvunno fullständigt vid en väglängd motsvarande i förhållande till α-partiklarnas väglängd beräknade 28 cm.

Antalet »snabba» vätepartiklar, som utstötas i samma riktning som de ursprungliga α-partiklarna, är betydligt större än man av stötlagarna skulle kunna vänta. Detta antyder, att kärnorna i vissa fall närma sig varandra så mycket, att de i stötögonblicket icke kunna betraktas som punktformiga utan av en viss utbredning liksom också att Coulombs lag icke gäller för dessa små avstånd. Rutherford har beräknat, att minsta avståndet mellan en väte- och en heliumkärna endast är $3 \cdot 10^{-13}$ cm, ett tal som också anger storleksordningen på diametern hos dessa kärnor. Diametern i atomens yttersta elektronring beräknas till cirka 10^{-8} cm.

Ersattes vätet med torr syrgas, uteblevo de svaga scintillationerna. Endast enstaka kraftiga sådana uppträdde, som emellertid försvunno redan vid ett absorberande skikt motsvarande 9 cm. Dessa ha tolkats på olika sätt, dels som »snabba» syreatomer, dels som partiklar av massa 3. Rutherfords sista förklaring går ut på att de äro långsgående α-partiklar, utsända av det aktiva preparatet självt.

Infördes väl torkad luft i apparaten, kvarstodo de starka scintillationerna, men dessutom iakttogs det märkliga fenomenet av en hel del svaga scintillationer av samma natur som dem som erhölls i vätgas. Rutherford har försäkrat sig om att de ej kunna härröra från vatten eller andra närvarande väteföreningar. Genom uppmätning av scintillationernas förskjutning, då de snabbgående partiklarna passera magnetiska och elektriska fält, har han dessutom konstaterat samma förhållande mellan laddning och massa som för de snabba väteatomerna. Fenomenet kan då knappast tydas på annat sätt än att under α-partiklarnas kraftiga bombardemang kvävekärnor ha sönderspräng̈ts under utslungande av vätekärnor, att sålunda en verklig atomsönderdelning skulle ha ägt rum.

De i kvävgas erhållna scintillationerna voro mycket svaga,

men sedan försöksanordningen förbättrats, förnämligast genom användande av ett särskilt lämpat mikroskop, kunde noggranna undersökningar göras. Rutherford fann då, att det absorberande lagret kunde ökas ända till motsvarande 40 cm luft, innan scintillationerna upphörde. Räckvidden var alltså betydligt större än för de snabba vätepartiklarna från vätgas. Vidare var antalet scintillationer vid given absorption oberoende av den kemiska förening i vilken kvävet ingick, vilket är naturligt, då kraften, som fordras för att ur kvävekärnan utkasta en vätekärna, är enorm i förhållande till den kraft, som sammanhåller atomerna i en kemisk förening.

Även om utkastandet av vätepartiklar är ett ytterst sällsynt fenomen, ty på 300 tusen α-partiklar synes endast 1 komma tillräckligt nära kvävekärnan för att ur den avspjälka en vätekärna, så är det dock första gången, som man bevisligen på *artificiell väg lyckats åstadkomma en atomsönderdelning.*

Undersökningarna ha även utsträckts till andra element. Om dessa ej själva eller i förening kunnat erhållas i gasform, har Rutherford framför den aktiva plattan placerat ett tunt bleck av ämnet i fråga eller har han på ett guldblad, motsvarande 3 cm luft, i stoftform avsatt ämnet eller detsamma i förening med ett inaktivt ämne, vanligen syre. Apparaten har dessutom fyllts med inaktiv torr syrgas. För att undvika möjligen uppträdande snabba väteatomer från vätet självt ha undersökningarna endast omfattat partiklar, vars räckvidd är större än 32 cm luft.

Sålunda har Rutherford genomgått de 19 första elementen upp till atomvikt 40, utom helium, neon och argon, samt dessutom prövat klor, kalium, kalcium, titan, mangan, järn, koppar, tenn, silver och guld. Av dessa ha endast sex visat sig giva scintillationer utöver 32 cm luft, nämligen bor, kväve, fluor, natrium, aluminium och fosfor; bor och natrium dock betydligt färre än de övriga. De erhållna data stå anförda i tabellen på nästa sida. Därav framgår, att intet ämne med atomvikt högre än 31 utsänder partiklar över 32 cm räckvidd, då RaC använts som aktiv källa.

Tabell.

Element	Atom-nummer	Atom-vikt	$4n+a$	Ant. part per min. och mg	Räckvidd framåt	Räckvidd bakåt
B	5	10,82	$2\cdot4+3$	0,15	58	38
N	7	14,008	$3\cdot4+2$	0,7	40	18
Fl	9	19,00	$4\cdot4+3$	0,4	65	48
Na	11	23,00	$5\cdot4+3$	0,2	58	36
Al	13	27,1	$6\cdot4+3$	1,1	90	67
P	15	31,04	$7\cdot4+3$	0,7	65	49

Genom särskilda undersökningar har Rutherford konstaterat, att räckvidden i första approximationen är proportionell mot de träffande α-partiklarnas räckvidd och att antalet scintillationer hastigt avtar, när α-partiklarnas hastighet minskar. De senare måste ha en viss kritisk energi för att alls kunna åstadkomma en spjälkning av atomerna. Medelst avböjning i magnetiska och elektriska fält har Rutherford för fluor, fosfor och aluminium prövat, att de utkastade partiklarna verkligen äro vätekärnor och antar, att detsamma är förhållandet för övriga ämnen.

Det är egendomligt, att vätekärnor utkastas endast från några få element, vilka alla äro enkla ämnen utom bor, som består av två isotoper. Dessa »aktiva» ämnens atomnummer äro på varandra följande udda tal. Skrivas deras atomvikter under formen $4n+a$, där n och a äro hela tal och a dessutom mindre än 4, så uttryckas alla de »aktiva» ämnenas atomvikter med $4n+3$ utom kvävets, som har $4n+2$.

Något enkelt förhållande mellan antalet utsända vätepartiklar och atomvikten eller atomnumret synes ej existera, ej heller för räckvidden. Anmärkningsvärt är även, att vätepartiklarna ej utkastas företrädesvis i α-partiklarnas riktning utan nästan lika många åt motsatt håll, ehuru räckvidden bakåt är mindre än räckvidden framåt, som synes av tabellen.

Genom sammanställande av Astons och Rutherfords resultat kan med säkerhet slutas ill, att alla ämnen ursprung-

ligen äro uppbyggda av vätekärnor, vilka samtidigt utgöra positiva elektricitetsatomer, protoner. Vätet självt består av en proton och en yttre elektron. Helium med atomvikt 4 måste innehålla 4 protoner, men då atomnumret och därmed också kärnladdningen endast är 2, måste kärnan dessutom innehålla två elektroner, som neutralisera ett lika stort antal protoner. Denna sammanslutning, som bildar ett synnerligen stabilt system, detsamma som finnes i α-partikeln synes ingå som sådant i övriga atomers kärnor. På detta sätt har man kommit tillbaka till grundtanken i Prouts hypotes, ehuru modifierad såtillvida, att atomerna innehålla två slag av ursprungliga byggnadsstenar, protoner och elektroner.

Varje ämnes atomvikt kan uttryckas medelst formeln $K+N$, där K betecknar antalet elektroner i kärnan och N antalet yttre elektroner och på samma gång atomnumret. Ämnen med samma N men olika $K+N$ äro isotoper, ämnen med samma $K+N$ men olika N äro isobarer. En neutral atom med atomvikt m förbyts i en annan med atomvikt $m-1$ genom avgivande av en proton och en elektron. Tages båda från kärnan, uppstår en isotop, tages endast protonen från kärnan och elektronen från det yttre höljet, uppstår ett ämne med närmast lägre atomnummer.

Från Astons heltalsregel för de enkla atomarternas massor undantas blott ett ämne, nämligen vätet självt med atomvikt 1,008. Detta förklaras så, att då 4 protoner och 2 elektroner sluta sig tillsammans till ett stabilt system, frigöras energimängder (E), som enligt relativitetsteorin svara mot den förlust i massa (m), som äger rum, så att $E = mc^2$, där $c =$ ljusets hastighet. I atomer där atomvikten motsvarar $4n$ är kärnan troligen uppbyggd av n heliumkärnor. Vid deras sammanslutning även med en del elektroner synes ingen nämnvärd förlust av massa äga rum. Det är därför antagligt, att heliumkärnorna existera i kärnan som diskreta fast tätt liggande delar, vilket just utsändande av α-partiklar från de radioaktiva ämnena peka hän på, liksom också α-partikelns stora stabilitet. Hos dessa

ämnen har Rutherford ej funnit några vätescintillationer, utan endast hos sådana, där utom heliumkärnor även fria vätekärnor böra förekomma, såsom anges av tabellen på sid. 8. Särskilt för att förklara, att vätepartiklar utkastas i alla riktningar, antar Rutherford, att fria vätekärnor i dessa ämnen liksom satelliter i ett planetsystem rotera kring den övriga delen av kärnan. Den riktning i vilken en vätekärna utkastas, beror då på dess tillfälliga läge i förhållande till, dels den träffande α-partikeln, dels den egna kärnan. Då vätet alltså är ganska löst bundet, borde det ingå med atomvikt nära 1,008. Kväve, vars atomvikt uttryckes genom $4n+2$, skulle ha 2 vätesatelliter mer än kol med atomvikt 12,00. Genom noggranna mätningar enligt Astons metod borde man kunna avgöra om kvävets atomvikt ligger närmare 14,016 än 14,00.

Av detta framgår vilken stor betydelse noggranna atomviktsbestämningar kunna ha för kännedomen om kärnans struktur.

I det föregående har antagits, att kärnan är uppbyggd av ett överskott av diskreta, positivt laddade partiklar. För att detta skall vara möjligt måste förutsättas, att vid de små avstånd, som det här är fråga om, en attraktion äger rum mellan delar av lika laddning. Även vätesatelliten måste genom attraktion hållas kvar vid den övriga delen av kärnan. Ju lösare bunden den är, ju längre ifrån den övriga delen av kärnan den befinner sig, desto lättare bör det vara att driva ut den. Att inga vätescintillationer kunnat iakttas för element tyngre än fosfor kan bero på att vätet är fastare bundet vid kärnor av högre atomnummer eller att räckvidden är mindre än den som Rutherford kunnat iakttaga. Vid radiuminstitutet i Wien har nyligen en metod utarbetats av svensken Hans Petterson och tysken Kirsch, enligt vilken mätningar av vätepartiklar med mindre räckvidd skulle kunna utföras. Intressanta resultat ha redan erhållits, men då ingen detaljerad redogörelse ännu publicerats, är det för tidigt att draga några slutsatser därav.

En omständighet, som särskilt förtjänar beaktande, är den stora hastighet, som vätepartiklarna få, då de utslungas från andra atomers kärnor, under det att de snabba väteatomerna från vätgas ha hastigheter, som svara mot de ur stötlagarna beräknade. Då vätepartikelns räckvidd överstiger 56 cm, som den enligt tabellen gör för alla ämnen utom kväve, är dess energi till och med större än den använda α-partikelns. Den överskjutande energin måste tagas från själva kärnan, uppstå vid dess sönderbrytande. Denna utsänder alltså en del av sin bildningsenergi, något i överensstämmelse med vad som sker vid det radioaktiva sönderfallet. Här skulle man kunna se en väg öppnad till frigörande av de energimängder, som existera i atomerna omkring oss. Hur utomordentligt intressant detta än är ur teoretisk synpunkt, kan man knappast vänta sig någon praktisk betydelse därav. Antalet atomer som på detta sätt sprängas sönder är ytterst minimalt. Rutherford har beräknat, att varje α-partikel från RaC passerar omkring 100 tusen atomer på sin väg och dock är det endast en på 1 miljon α-partiklar, som går tillräckligt nära en aluminiumkärna för att utkasta en vätekärna.

Om alla α-partiklar från 1 gram radium finge gå genom aluminium, skulle den mängd väte, som frigjordes genom sönderspräng̈ning av aluminiumatomer, endast belöpa sig till 0,001 mm^3 på ett år!

Några försök till elektricitetsläran.

Av BENKT SÖDERBORG.

Här nedan beskrivna försök från Högre reallärоverket på Norrmalm i Stockholm göra icke anspråk på någon originalitet. Men de äro enkla och instruktiva, och ur den synpunkten torde en redogörelse för dem i denna tidskrift försvara sin plats.

1. Ohms lag II.[1]

Man gör ett element av kol- och zinkelektroder samt utspädd svavelsyra och kaliumbikromat, som slås i en stor vanna till någon cm:s djup. I ytterledningen inkopplas ett variabelt motstånd och en ampèremeter. Dessutom förbindas polerna genom en voltmeter V_1. Intill zinkelektroden nedsättes en kolelektrod, som genom en annan voltmeter V_2 står i förbindelse med elementets kolelektrod.

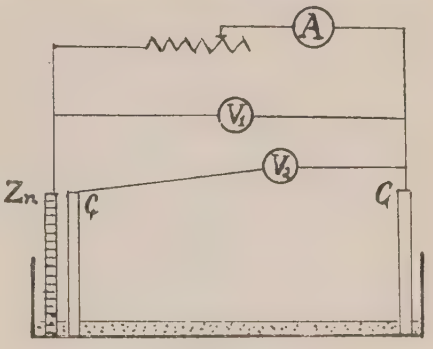


Fig. 1.

Zinkelektroden bör vara amalgamerad och under försökets gång neddoppas i syran endast under de ögonblick, som behövas för avläsningen av instrumenten. Mellan avläsningarna lyftes den upp ur syran. Man ser till, att kolen äro rena, så att intet utslag erhålles på V_2, när elementet är öppet. Tre

[1] Ur Gallanders Elektricitetslära sid. 41. Se också Ohlons uppsats om »Ohms och Kirchhoffs lagar vid gymnasieundervisningen» i Ped. Tidskr. för 1921, sid. 204.

elever få avläsa var sitt av instrumenten. På grund av polarisationen ändras utslagen, och avläsningarna böra därför göras raskt och omedelbart efter zinkens neddoppande. V_1 anger potentialfallet i ytterledningen (V_y), V_2 i elektrolyten (V_i).

Ex. från ett lektionsförsök:

R_y	I	V_y	V_i	$V_i : I$	$V_y + V_i$
∞	0	1,85	0	—	1,85
20	0,06	1,45	0,37	6	1,82
15	0,08	1,25	0,47	6	1,72
10	0,11	1,15	0,54	5	1,69
5	0,16	0,88	0,79	5	1,67
3	0,21	0,70	0,90	4	1,60
2	0,24	0,60	1,10	5	1,70
1	0,28	0,35	1,28	5	1,63
0	0,35	0,08	1,49	4	1,57

Det under R_y angivna motståndet var en proppreostats. Därtill komma kontaktsmotstånden. Ur tabellen utläser man följande. Då det yttre motståndet minskas, så ökas strömstyrkan, och polspänningen sjunker. Man återfinner sänkningen i en motsvarande höjning av det inre potentialfallet så att $V_y + V_i$ blir konstant. Den gång neråt, som summan visar i tabellen, beror på polarisationen, som minskar elementets elektromotoriska kraft. Kvoten $V_i : I$ är konstant, vilket eleverna ha att vänta, om de äro förtrogna med »några elektrokemiska erfarenhetssatser och teorier» (Molls kemi). De två första avläsningarna av strömstyrkan äro tydligen något för låga.

Försöket ger omedelbart:

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_y}{I} &= R_y \\ \frac{V_i}{I} &= R_i \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \frac{V_y + V_i}{I} = R_y + R_i$$

eller

$$I = \frac{E}{R}.$$

*

Ohlons metod för inlärande av Ohms första lag är värdefull. Den ger stadga åt begreppsbildningen. Potentialdifferens blir ett självständigt och primärt begrepp. Om man på ett elektroskop mäter det utslag, som erhålles av potentialdifferensen mellan en ackumulators poler, och vidare visar, att detta utslag blir oförändrat, om ackumulatorn kopplas i serie med andra ackumulatorer till ett öppet batteri (Bergholm: Lärobok i fysik, III, sid. 34), så är det självklart, att de lika seriekopplade ackumulatorernas antal i batteriet är ett mått på potentialdifferensen mellan batteriets poler.

2. Magnetfältets energi.

Om den drivande elektromotoriska kraften i en sluten strömkrets är E, och om strömkretsen också innehåller en mot strömmen riktad elektromotorisk kraft e, så är strömstyrkan

$$I = \frac{E - e}{R_i + R_y}$$

och energien fördelar sig enligt ekvationen

$$E \cdot I = R_i \cdot I^2 + R_y \cdot I^2 + e \cdot I.$$

De två första termerna i högra ledet angiva det utvecklade jouleska värmet, som i regel är en energiförlust. Den tredje termen $e \cdot I$ är huvudtermen och angiver den energiform, som man erhåller genom den elektriska strömmens förmedling, såsom kemisk energi vid elektrolys och laddning av ackumulatorer, såsom mekanisk energi i motorer.

Ett magnetfält är energi. Då en elektrisk ström slutes, så erhålles ett magnetiskt fält. Vilken energiform är det som härvid försvunnit för att i stället ge en ekvivalent mängd magnetisk energi? Svaret kan lämnas i ett försök, som Grimsehl i detalj beskriver i sin lärobok i paragrafen »Folgerungen aus der magnetischen Energie eines magnetischen Kreises».

En nifeackumulator (dubbelcell) kopplas i serie med en ampèremeter, en stark elektromagnet (Lemoines magnet)

och en strömbrytare. Parallellt med ampèremetern-elektromagneten kopplas en glödlampa på några få volt. Då strömmen slutes, stiger styrkan hos strömmen genom elektromagneten långsamt till ett konstant slutvärde på omkring 0,30 amp. Om magnetens polskor ligga tätt ihop, så att den magnetiska kretsen är fullkomligt sluten, så är visarens rörelse märkbar ännu efter 7 sek.

Antag, att strömstyrkan i ett visst ögonblick, innan den ännu nått sitt slutliga värde I, är I_n, så måste det — eftersom $I_n < I$ — finnas en elektromotorisk motkraft e_n i kretsen, och effektfördelningen är

$$E \cdot I_n = R_i \cdot I_n^2 + R_y \cdot I_n^2 + e_n \cdot I_n .$$

Härvid bortses ifrån shunten, som vid denna första fas av försöket lika väl kan vara borta. Den sista termen representerar den magnetiska effekten. Det slutliga magnetfältets energi är $\Sigma e_n I_n \Delta t_n$, där $\Sigma \Delta t_n$ är summan av tidsintervallerna från strömmens slutande tills den nått full styrka.

Motsvarande inträffar, när strömmen brytes. Då försvinner (förminskas) den magnetiska energien och övergår i elektrisk energi, som omsättes i värme. Även nu är rörelsen hos ampèremeterns visare märkbar under 7 sek. efter avbrottet. Om den inkopplade lampan har för stort motstånd, blir den vid avbrottet inducerade strömmen för svag för att kunna iakttagas, och om shunten (lampan) icke är inkopplad, så går strömstyrkan ögonblickligen ner till noll vid avbrytandet. Den magnetiska energien omsättes i så fall i värme genom svängningar i kretsen (gnistan vid avbrottsstället).

Om man, när strömmen är sluten, bryter isär polskorna, så förstöres magnetfältet, d. v. s. försvagas i högsta grad, och ampèremeterns visare slår för ett ögonblick ut till 1 amp. Om man åter för ihop polskorna, så uppbygges magnetstället på nytt till sin förra styrka, och strömstyrkan nedgår ögonblickligen till 0,1 amp. för att sedan långsamt stiga till det konstanta slutvärdet 0,3 amp.

En krets utan självinduktion kan icke alstra något magnetfält. Ett i förhållande till strömmen starkt magnetfält

(stor självinduktion) är för den elektriska strömkretsen vad ett tungt svänghjul är för en maskin. Det upptager och återger automatiskt och relativt långsamt energi och hindrar därigenom ryckvisa förändringar.

3. Den ballistiska galvanometern.

Såsom ballistisk galvanometer användes med fördel Lemoines galvanometer, ett utmärkt skolinstrument, som trots sin känslighet tåligt fördrager snart sagt vilken misshandel som helst. I läroverkets galvanometer är magnetparet upphängt i en kvartstråd, en förbättring, som rekommenderas.[1] Tråden är stark, ökar galvanometerns känslighet och ger den en fix nollpunkt.

Det ballistiska utslaget är ett mått på elektricitetsmängden. Genom en dubbelsidig dubbel strömbrytare (vippa) laddar man ömsevis upp en kapacitet från ett ackumulatorbatteri och urladdar den genom galvanometern. Man finner utslaget proportionellt mot produkten av kapaciteten och de seriekopplade cellernas antal. Däremot är det oberoende av motståndet. Ett i galvanometerkretsen inkopplat motstånd på ett par tusen ohm ändrar sålunda icke utslaget.

Från $2mF$, laddade från 5 seriekopplade nifeackumulatorer (dubbelceller) erhölls utslag, som varierade mellan 31,0 och 32,5, och med $1mF$, laddad till samma spänning, utslag mellan 15,0 och 16,0.

Magneterna i läroverkets galvanometer oroas något av spårvägsströmmen, såvida icke riktmagneten är placerad lågt. Galvanometerkonstanten (riktmagneten placerad 10 cm ovanför magnetparets övre ändar) bestämdes därför arla en söndagsmorgon, då även spårvagnarna gått till vila i sina stallar. Med 7 nifeackumulatorer, polspänning 18,5 volt, och $2mF$ erhölls oföränderligt utslaget 42,5 skaldelar.

En skaldels utslag representerar således $0{,}87 \cdot 10^{-6}$ coulomb.

[1] Tråden är dragen och ditsatt av fil. lic. R. Strömberg.

4. Växelströmmens sinusform.

Ett enkelt sätt att visa växelströmmens sinusform angives av Grimsehl i hans lärobok, paragrafen »Rotation eines Leiters im magnetischen Felde». Man kan vid försöket begagna den anordningen, att en liten spole får rotera mellan polskorna (de cylindriska ändarna) till Lemoines magnet.[1] Spolen (*S*) har 2 cm:s diameter och utgöres av 30 varv fin koppartråd. Den sitter på en 10 cm lång axel,

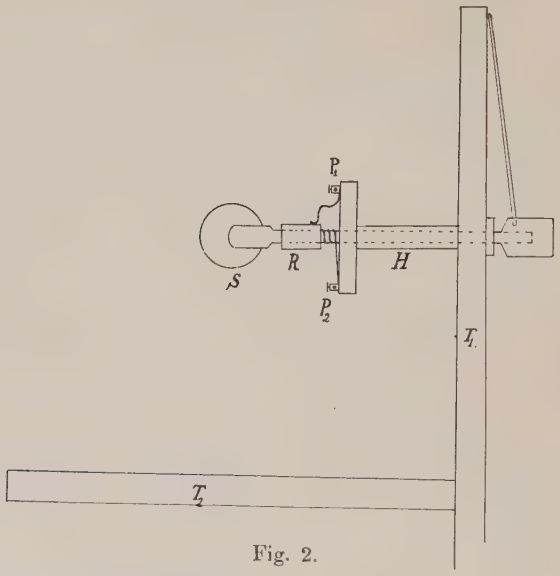


Fig. 2.

som utan att glappa lätt kan vridas i en mässingshylsa (*H*), fastsatt i en träskiva (T_1), som i sin tur är fastskruvad vid en annan träskiva (T_2). Denna kan trädas över järnkärnorna i magneten som ett bord, och det hela är så avpassat, att spolen kommer att sitta väl centrerad mellan polskorna och således befinna sig i ett homogent fält. Järnkärnorna och polskorna till läroverkets magnet ha 6 cm:s

[1] Försöket har införts vid läroverket av fil. lic. H. Bäckström, och apparaten har förfärdigats av läroverkets maskinist H. Berggren.

diameter. Den ena ändan av spolens tråd är fästad vid en ring (R), som sitter fästad på axeln och är isolerad från denna. Ringen står genom en släpkontakt i förbindelse med polskruven P_1. Den andra ändan av spolens tråd är fästad vid själva axeln, som genom den raka ändan av en spiralfjäder (mässingstråd) står i förbindelse med klämskruven P_2. Klämskruvarna sitta på en liten fiberplatta på hylsan H. Vid axelns yttre ända sitter ett litet handtag (en knapp av ebonit), i vilket en 10 cm lång visare är fästad. Då man vrider spolen rör sig visaren över en gradskiva på träplattan T_1. Vid var tionde grad är ett litet stift inslaget. När man skall vrida visaren förbi ett stift, så drager man ut hela axeln litet. På andra sidan stiftet återför den ovan nämnda spiralfjädern axeln i sitt normala läge och kvarhåller den där.

Man kopplar via en strömbrytare galvanometern till klämskruvarna P_1 och P_2. Polskorna läggas på magneten med de cylindriska ändarna mot varandra och föras ihop så långt som går utan att spolens vridning hindras. Ström släppes på magneten. Man vrider nu visaren hastigt från ett stift till ett annat och observerar det ballistiska utslaget på galvanometern. Härvid får man naturligtvis se till, att visaren icke studsar tillbaka från det stift, som stoppar rörelsen.

Galvanometerutslagen mäta den elektricitetsmängd, som alstras vid vridningen d. v. s. $I_a \cdot t$, om I_a är medelvärdet på strömstyrkan vid en vridning på 10° och t tiden för denna vridning. Om vridningen skett från 20-gradersstiftet till 30-gradersstiftet, så är således α 25°. Om nu vridningen tänkes ske oavbrutet och med konstant hastighet, så äro således galvanometerutslagen ett mått på strömstyrkan i de särskilda lägena, och eftersom motståndet är konstant, så äro de också ett mått på den i de särskilda lägena inducerade elektromotoriska kraften.

Man finner, att utslagen äro proportionella mot sinus för vinkeln mellan spolens (geometriska) axel och kraftlinjerna. Genom att reglera strömmen i magneten kan man laga så,

att förhållandet mellan utslagen och sinus för vinkeln blir ett enkelt tal. I nedan återgivna försök användes en ström på 3 amp., varigenom utslaget för vridning 80° – 90° blev 100. De angivna utslagen äro medelvärden av 3 avläsningar.

Ex.

Visarens medelläge (α)	Sin α	Galv:s utslag
5°	0,09	9
15°	0,26	26
25°	0,42	43
35°	0,57	55
45°	0,71	73
55°	0,82	82
65°	0,91	89
75°	0,97	97
85°	1,00	100

I den andra kvadranten erhållas samma värden i omvänd ordning, och för det andra halvvarvet upprepas detsamma, men med utslagen åt motsatt håll. Man har således $I = I_0 \sin \alpha$.

5. Mätning av magnetiska flödens styrka.[1]

För den inducerade elektromotorisk kraften gäller formeln

$$E = 10^{-8} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Om strömstyrkan är I och motståndet R, så har man således

$$\Delta \Phi = 10^8 R \cdot I \cdot \Delta t.$$

Här är $I \cdot \Delta t$ den elektricitetsmängd, som alstrats under tiden Δt, och om man nu summerar förändringarna från ett begynnelsetilllstånd till ett sluttillstånd, så betyder $\Sigma \Delta \Phi$ hela flödesförändringen och $\Sigma I \cdot \Delta t$ hela den alstrade elek-

[1] Se Bloms uppsats »Om behandlingen av de elektromagnetiska lagarna inom elementarfysiken» i denna tidskrift för 1919—20, sid. 19.

tricitetsmängden Q^*. Man har då

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 10^8 \cdot R \cdot Q^*,$$

och Q^* kan mätas med den ballistiska galvanometern.

Ex.

I. *Jordmagnetiska fältet.*

För försöket användes en spole av koppartråd, upplindad i 27 varv i form av en kvadrat med 0,5 m:s sida på en träram. Spolen kopplades till galvanometern och vreds hastigt ett halvt varv omkring en axel i sitt eget plan. I utgångs- och slutläget skall lindningens plan vara vinkelrätt mot inklinationsnålen, och man får vid den hastiga vridningen tillse, att detta induktionsfria läge icke överskrides, emedan utslaget i så fall naturligtvis blir för litet.

Då galvanometerkretsen är sluten, så blir galvanometerkonstanten en annan än vid kondensatorurladdning, ty nu inducera galvanometerns magneter under sin rörelse en induktionsström, som — enligt Lenz' lag — dämpa nålens utslag. Dämpningen och galvanometerkonstanten bli således funktioner av kretsens motstånd. Här nedan användes såsom värde på konstanten det under (3) uppgivna $0{,}87 \cdot 10^{-6}$. Man har då att vänta för lågt värde på flödets intensitet.

En serie observationer, som gjordes vid förut nämnda tidiga timme, då inga spårvagnar gå, gav följande värden på galvanometerns utslag:

52, 54, 50, 50, 51, 51, 50, 50, 50, 48.

Medeltalet är 50,6. Vridningarna gjordes parvis, fram och tillbaka. Lindningens motstånd var 4,61 ohm och galvanometerns 7,84, hela motståndet således 12,45 ohm. Om fältets intensitet (antal linjer pr cm^2) betecknas med H, så är hela flödesförändringen under ett halvvarv $2 \cdot H \cdot 27 \cdot 2500$, och man har således

$$2 \cdot H \cdot 27 \cdot 2\,500 = 10^8 \cdot 12{,}45 \cdot 50{,}6 \cdot 0{,}87 \cdot 10^{-6}$$

varav erhålles

$$H = 0{,}41 \text{ linjer pr } cm^3 \text{ (Gauss)}.$$

Till jämförelse gjordes en bestämning av horisontalkomposanten med en tangentbussol. Man har där formeln

$$H_h = \frac{N \cdot \pi I}{5r \cdot \operatorname{tg} \alpha},$$

där N och r äro resp. varvantal och lindningarnas radie. Här var $N=4$; $I=0{,}750$ amp.; $r=13{,}4$ cm och $\alpha=43°{,}5$, vilket ger

$$H_h=0{,}15 \text{ och } H=\frac{H_h}{\cos 71°}=0{,}45.$$

Omvänt kan naturligtvis försöket användas för att bestämma galvanometerkonstanten.

II. *Lemoines magnet.*

Mellersta delen av en ledningstråd formades till en kvadrat med 1 cm:s sida, från vars ena hörn trådarna snoddes ihop till en induktionsfri ledning till galvanometern. Kvadraten infördes mellan polskorna och rycktes hastigt ur fältet. Galvanometerns motstånd var 7,8 ohm.

a) De *koniska* ändarna av polskorna vända mot varandra.

Luftgap	Strömst. i magnetens spolar	Galv:s utslag	Fältstyrka
1 cm	1 amp.	1,8	1 200 gauss.
1 »	3 »	5,2	3 500
1 »	5 »	8,6	5 800
1 »	7 »	9,9	6 700
2 »	5 »	5,6	3 800
3 »	5 »	4,4	3 000
0,5 »	3 »	10,1	6 900

b) De *cylindriska* ändarna av polskorna vända mot varandra. Strömstyrka: 5 amp.

Luftgap	Utslag	Fältstyrka
1 cm	7,5	5 100 gauss.
2 »	4,5	3 100
3 »	3,7	2 500

*

Dessa mätningar äro naturligtvis icke avsedda som precisionsmätningar. Men de giva mera innehåll åt åskådningen av kraftfält och kraftlinjer. I det jordmagnetiska fältet har man att tänka sig en linje på 2,5 cm^2, i elektromagnetens fält ända upp till 7 000 linjer pr cm^2.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Newtons lag ur Kepplers lagar.

Lektor Meyer har i tredje häftet, sjätte årgången, visat hur Newtons lag kan härledas ur Kepplers lagar. Avsikten med dessa rader är blott att visa, hur räkningarna kunna förenklas genom att utgå från ekvationssystemet

$$r = a + \frac{c}{a}(x - c) = \frac{b^2 + cx}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

och icke använda ellipsens ekvation.

Genom derivation av (2) erhålles

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\frac{d^2r}{dt^2} \quad . \quad . \quad (4)$$

Enligt ytsatsen är

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = -k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Kvadreras (3) och (5) och adderas erhålles med hjälp av (2)

$$r^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = k^2 + r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

varigenom (4) reduceras till

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2} + r\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2} + \frac{cr}{a}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \quad . \quad (6)$$

eller

$$\left(x - \frac{cr}{a}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2}.$$

Vidare är

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\left(x - \frac{rc}{a}\right)\frac{d^2x}{dt^2}}{x\left(x - \frac{cr}{a}\right)} = \frac{y\frac{d^2y}{dt^2}}{y^2} = \frac{-\frac{k^2}{r^2}}{r\left(r - \frac{cx}{a}\right)} = \frac{-\frac{k^2}{r^2}}{\frac{rb^2}{a}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}{r} \quad \because \text{acceleralionen} = -\frac{ak^2}{b^2r^2}.$$

S. B—n.

Anmärkning beträffande lösningen av en fysikalisk uppgift.

Ofta förekommande är följande uppgift:

En tunn lins, vars brytningsindex är n omgives av två medier A_1 och A_2, vilkas brytningsindices äro n_1 och n_2 resp. Var faller bilden av ett föremål, placerat framför linsen?

Här brukar talas om brytningen i första och andra linsytan. En annan lösningsmetod är följande. Tänkes föremålet befinna sig på avståndet a i mediet A_1 och linsen antages vara bikonvex med radierna r_1 och r_2, så placeras en bikonkav lins av mediet A_1 framför och intill den givna linsen. Radien i den mot föremålet belägna linsytan tages lika med a och den andra lika med r_1. Föremålet befinner sig nu i medelpunkten till linsytan och strålarna gå därför obrutna vid denna yta. Vi kunna därför borttaga mediet A_1 och ersätta det med vilket medium som helst, lämpligen med A_2. Vi erhålla således ett linssystem på båda sidor omgivet av mediet A_2. Tillämpas linsformeln erhålles

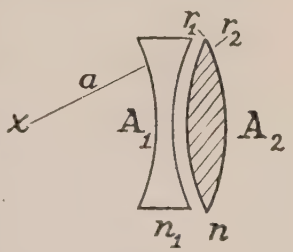


Fig. 1.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F}$$

där x är bildens i mediet A_2 avstånd från linsen samt F systemets brännvidd.

Nu är

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f_1}$$

där

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}\right) \text{ och } \frac{1}{f_1}=\left(\frac{n}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

Slutekvationen blir alltså

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}\right)+\left(\frac{n}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

Man kan även tänka sig en bikonkav lins av mediet A_2 med radierna r_2 och x placerad på andra sidan.

Ekvationen blir då

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=\left(\frac{n}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}\right)+\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{x}\right)$$

vilken skall ge samma svar på x.

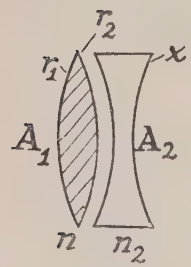


Fig. 2.

Denna senare metod är lämplig, om mediet A_1 är luft.

För att visa metodens användning tages ett speciellt exempel: På ett 12 cm djupt med vatten helt fyllt provrör lägges en tunn plankonvex lins så, att den undre plana linsytan sammanfaller med vätskeytan. Den konvexa ytans radie är 4 cm och glasets brytningsindex $\frac{3}{2}$. Var faller bilden av ett föremål placerat på provrörets botten? Vattnets brytningsindex är $\frac{4}{3}$. (V. T. 1922.)

Med tillhjälp av en bikonkav lins av vatten fås genast ekvationen:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{x}=\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{1}{4}\right).$$

Varav $x=72$.

S. B—n.

Matematiska uppgifter.

151) Om c är ett helt tal > 1, så kan $4c^3 - 1$ icke vara tre gånger kvadraten på ett helt tal. (*Mebius.*)

152) Bestäm i kurvan $y = 3ax^2 - x^3 + a^2$ värdet på a så, att ytan av den triangel som begränsas av koordinataxlarna och kurvans tangent i dess inflexionspunkt blir så stor som möjligt. (*H. Stenmark.*)

153) Visa att i kurvan $y = 3a^2x^2 - ax^3$ avståndet från maximipunkten till tangenten i inflexionspunkten är lika med avståndet från minimipunkten till samma linje. (*H. Stenmark.*)

154) Att upprita en triangel, då man känner de vidskrivna cirklarnas radier. (*Iter.*)

155) I en likbent triangel är toppvinkelns bissektris hälften så stor som basvinkelns. Sök vinklarna.

156) På en cirkulär cylinder utskäres en kurva genom en sfär, vars medelpunkt ligger på cylinderns yta. Sök ekvationen för denna kurva, då cylindern utvecklas i ett plan.

Lösningar till uppg. i häft. 4. 1922—23.

139) *Man betraktar alla trianglar på samma bas. Visa att rektangeln av de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier närmar sig ett bestämt gränsvärde, då triangelns fria vinkelspets närmar sig en bestämd punkt på basen.*

Låt triangelns sidor vara a, b, c, där a är den sida som i närheten av gränsläget är större än de övriga. (Punkten P, till vilken den fria vinkelspetsen närmar sig, kan även ligga på basens förlängning.) Då är $\lim a = \lim (b + c)$.

Men
$$R \cdot r = \frac{abc}{4T} \cdot \frac{T}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{abc}{2(a+b+c)},$$

således
$$\lim Rr = \frac{\lim a \cdot \lim b \cdot \lim c}{2 \cdot 2 \cdot \lim a} = \frac{\lim b \cdot \lim c}{4}.$$

Det sökta gränsvärdet är således fjärdedelen av rektangeln av basens delar, om P ligger på basen, men fjärdedelen av rektangeln av basen och dess mindre segment, om P ligger på basens förlängning.

Anm. Av den näst sista ekvationen framgår, att

$$bc = 2Rr\,\frac{a+b+c}{a} = 2Rr\left(1+\frac{b+c}{a}\right) > 4Rr,$$

således att rektangeln av två sidor i en triangel alltid är större än rektangeln av de in- och omskrivna cirklarnas diametrar. (Löst av *X*.)

140) *Bevisa att* a^5 *alltid måste sluta på samma siffra som* a.

Vi hava $a^5 - a = a(a^2-1)(a^2+1) = a(a+1)(a-1)(a^2+1)$.

Av den senare uppdelningen framgår genast, att $a^5 - a$ är divisibelt med 2 (och med 3). För att bevisa, att det även är divisibelt med 5 särskilja vi följande tre fall:

1) $a = 5p$, då är a divisibelt med 5,
2) $a = 5p \pm 1$, då är $a^2 - 1 = 25p^2 \pm 10p$, sål. divisibelt med 5.
3) $a = 5p \pm 2$, då är $a^2 + 1 = 25p^2 \pm 20p + 5$, sål. divisibelt med 5.

$a^2 - a$ är således alltid divisibelt med 2 och 5, varav satsen framgår.

Anm. 1. Av beviset följer även, att $a^5 - a$ är divisibelt med 30.

Anm. 2. Satsen är ett specialfall av Fermats sats, att $a^5 - a \equiv 0 \pmod 5$. (Löst av *X* och *Iter.*)

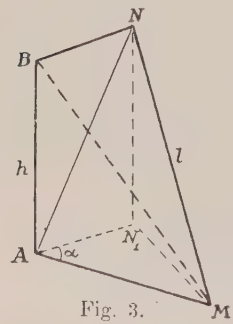


Fig. 3.

141) *Två räta linjer i olika plan bilda en given vinkel* $= \alpha$. *Deras kortaste avstånd* AB *är* $= h$. *Bestäm på dem två punkter* M *och* N *så, att* MN *har en given längd* l, *och tetraedern* $ABMN$ *en given volym* a^3.

Fullbordas parallellogrammen $ABNN_1$, så äro AM och $AN_1 (= BN)$ omfattande sidor i en triangel, vars bas är $\sqrt{l^2 - h^2}$ och vinkeln vid spetsen α. Men denna triangel är bas i pyramiden $N(AMN_1)$,

som har höjden h och är densamma som $M(ANN_1)$ och således lika med tetraedern $M(ANB) = a^3$. Triangeln AMN_1 är således $= \frac{3a^3}{h}$. AM och BN äro således sidor i en triangel, som har basen $= \sqrt{l^2 - h^2}$, vinkeln vid spetsen $= \alpha$ och ytan $\frac{3a^2}{h}$.

(*Iter.*)

142) *Konstruera brännpunkterna till en ellips eller hyperbel, då man känner de linjer, OX och OY, utefter vilka axlarna falla, samt två tangenter.*

Lätt bevisas, att de båda tangenterna från en punkt P bilda lika vinklar med var sin brännpunktsradie, ty om F_1 och F_2 äro brännpunkterna, F_1' och F_2' deras spegelbilder i var sin tangent, så äro trianglarna PF_1F_2' och $PF_1'F_2$ kongruenta. Härav följer, att vinkeln mellan tangenterna och vinkeln mellan brännpunktsradierna till P hava gemensamma bissektriser, och att dessa linjer skära OY i två punkter Q_1 och Q_2 på var sin sida om O, nämligen de punkter, där den kring F_1F_2P omskrivna cirkeln skär OY. Om då på Q_1Q_2 såsom diameter uppritas en cirkel, så utskär denna på OX brännpunkterna F_1 och F_2.

Skulle en bissektris gå genom Origo, sammanfalla foci, och ellipsen är en cirkel. Äro tagenterna parallella, finnes ingen konisk sektion som uppfyller villkoret, såvida ej tangenterna äro symmetriskt belägna med avseende å O, då det finnes oändligt många. Ligger P på OX eller OY, finnas koniska sektioner endast om tangenterna ligga symmetriskt i förhållande till O, i vilket fall likaledes finnas oändligt många.

Ett gränsfall av satsen är följande:

Tangenten och normalen i en punkt på en ellips eller hyperbel skära den axel som ej går genom foci i två punkter, som jämte brännpunkterna bilda en inskrivbar fyrhörning, en sats som ytterst lätt även kan bevisas analytiskt.

(Löst av *Iter.*)

143) Satsen införd på grund av ett misstag. Den finnes nämligen i årg. I, häft. 4, med lösning i årg. II, häft. 2.

144) *I en konvex n-hörning* (n *ett udda tal*) *är sidan* a_1 *delad i* p_1 *delar;* a_2 *i* p_2, ... a_n *i* p_n *delar och delningspunkterna sammanbundna med motstående vinkelspets* (*d. v. s. den som har lika många hörnpunkter mellan sig och sidans båda ändpunkter*). *I hur många delar blir därigenom figuren delad, förutsatt att aldrig tre av dessa linjer skära varandra i samma punkt? Hur förenklas formeln, om*

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n ?$$

Enligt uppgift äro sidorna i n-hörningen delade i p_i *delar* ($i = 1, 2, \ldots n$). Mellan ändpunkterna av varje sida finnas således $p_i - 1$ *delningspunkter*, till vilka från motstående vinkelspets gå lika många *delningsstrålar*. Antag nu, att vi dragit delningsstrålarna från r på varandra följande vinkelspetsar P_1, P_2, ... P_r och stå i begrepp att draga delningsstrålarna från nästa vinkelspets P_{r+1}. Dessa komma då att genomskära samtliga delningsstrålar från de r första vinkelspetsarna. För varje gång en förut dragen delningsstråle påträffas, fullbordas avskiljningen av en ny polygondel, och detta blir förhållandet även vid delningsstrålens framkomst till den motstående sidan. Varje delningsstråle från P_{r+1} ger således upphov till

$$p_1 - \overline{1} + p_2 - \overline{1} + \ldots + p_r - \overline{1} + 1 = \overset{r}{\Sigma} p_i - \overline{r - 1}$$

nya polygondelar. Om då $\varphi(r, p_i)$ betecknar antalet delar, i vilka n-hörningen sönderskurits av delningsstrålarna från de r första vinkelspetsarna, ha vi

$$\varphi(r+1, p_i) = \varphi(r, p_i) + (p_{r+1} - 1)\left(\overset{r}{\Sigma} p_i - \overline{r - 1}\right). \quad \ldots (1)$$

Vi företaga nu uppdelningen under användning av vår formel (1). Först draga vi $p_1 - 1$ strålar från P_1, varigenom polygonen delas i p_1 delar, därefter draga vi $p_2 - 1$ strålar från P_2, varigenom polygonen delas i $p_1 p_2$ delar. Vi erhålla därefter enligt (1)

$$\varphi(3, p_i) = p_1p_2 + (p-1)(p_1+p_2-1)$$
$$= p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 - (p_1+p_2+p_3) + 1$$
$$= \overset{(3)}{\Sigma} p_ip_k - \overset{3}{\Sigma} p_i + 1;$$
$$\varphi(4, p_i) = \varphi(3, p_i) + (p_4-1)(\overset{3}{\Sigma} p_i - 2)$$
$$= \overset{(4)}{\Sigma} p_ip_k - 2\overset{4}{\Sigma} p_i + 1 + 2;$$
$$\varphi(5, p_i) = \varphi(4, p_i) + (p_5-1)(\overset{4}{\Sigma} p_i - 3)$$
$$= \overset{(5)}{\Sigma} p_ip_k - 3\overset{5}{\Sigma} p_i + 1 + 2 + 3$$

eller generellt

$$\varphi(r, p_i) = \overset{(r)}{\Sigma} p_ip_k - (r-2)\overset{r}{\Sigma} p_i + \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2), \quad . . \quad (2)$$

där $\overset{(r)}{\Sigma} p_ip_k$ betecknar summan av alla produkter av formen p_ip_k, bildade av talen $p_1, p_2, \ldots p_r$, till antalet $= \frac{1}{2}r(r-1)$. Formeln verifieras lätt genom övergång medelst (1) från r till $r+1$.

Fortsätta vi att på detta sätt sönderdela polygonen medelst strålar från på varandra följande vinkelspetsar till och med den n:te, erhålles slutligen

$$\varphi(n, p_i) = \overset{(n)}{\Sigma} p_ip_k - (n-2)\overset{n}{\Sigma} p_i + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2). \quad . . \quad (3)$$

Detta är uppgiftens lösning under antagande, att varje vinkelspets är förenad endast med *delningspunkterna* på motstående sida, ej med dennas ändpunkter. Dragas åter delningsstrålar icke blott till delningspunkterna på motstående sida utan även till dennas ändpunkter, d. v. s. dragas, förutom de ovan betraktade delningsstrålarna, även n-hörningens *huvuddiagonaler*, får formeln naturligtvis ett annat utseende. Uppgiftens lösning under sistnämnda antagande är emellertid efter det föregående ytterst enkel. Vi behöva för detta ändamål endast tänka oss antalet strålar från varje vinkelspets ökat med 1, varefter vi genom vridning av de tillkomna extra-strålarna bringa dessa i diagonallägen. Om vi i (3) utbryta p_i mot p_i+1, erhålles

$$\varphi(n, p_i+1) = \overset{(n)}{\Sigma}(p_i+1)(p_k+1) - (n-2)\overset{n}{\Sigma}(p_i+1) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2). \quad . . . . . \quad (4)$$

Nu är emellertid, såsom lätt inses,

$$\overset{(n)}{\Sigma}(p_i+1)(p_k+1)=\overset{(n)}{\Sigma}p_ip_k+(n-1)\overset{n}{\Sigma}p_i+\tfrac{1}{2}n(n-1) \quad (5)$$

och

$$\overset{n}{\Sigma}(p_i+1)=\overset{n}{\Sigma}p_i+n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Insättas dessa värden på $\overset{(n)}{\Sigma}(p_i+1)(p_k+1)$ och $\overset{n}{\Sigma}(p_i+1)$ i (4), erhålles

$$\varphi(n, p_i+1)=\overset{(n)}{\Sigma}p_ip_k+\overset{n}{\Sigma}p_i+1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Denna formel kan med fördel användas i stället för (3), om man låter p beteckna antalet *delningspunkter* på sidorna.

Vridas nu samtliga extra-strålar i samma riktning (medsols eller motsols) kring sina utgångspunkter, tills de övergå i diagonallägen, försvinna slutligen vid varje vinkelspets p_i deltrianglar, således inalles $\overset{n}{\Sigma}p_i$ deltrianglar. Antalet polygondelar blir således i detta fall (för $n \geqq 5$)

$$\psi(n, p_i)=\overset{(n)}{\Sigma}p_ip_k+1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

För $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$ erhålles

$$\psi(n, p)=\tfrac{1}{2}n(n-1)p^2+1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Om vi slutligen i (9) sätta $p=1$, erhålles antalet delar, i vilka en n-hörning (n ett udda tal $\geqq 5$) delas av sina huvuddiagonaler. Detta antal är

$$s=\tfrac{1}{2}n(n-1)+1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

(*Iter.*)
Även löst av *X*.

Bidrag till teorin för den allmänna andragradsekvationen med två variabler.

Av S. BÅGMAN.

Antag ekvationen vara

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

så flytta vi origo till medelpunkten (x_1, y_1) genom substitutionerna

$$x=x_1+x'$$
$$y=y_1+y'$$

och erhålla då ekvationen

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F_1=0$$

eller med accenternas bortlämnande

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+F_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

där $F_1=Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F$

x_1 och y_1 skola satisfiera systemet:

$$\begin{cases} 2Ax_1+2By+D=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \\ 2Bx_1+2Cy+E=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{cases}$$

Vänstra leden av (3) och (4) äro de partiella derivatorna av vänstra ledet av (1) med x_1 och y_1 insatta.

Antaga vi nu $AC-B^2\neq 0$, bli x_1 och y_1 ändliga.

Vi vilja nu bringa (2) under formen

$$q(y-kx)^2+r(ky+x)^2+F_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

eller som den också kan skrivas

$$q(1+k^2)\left(\frac{y-kx}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2+r(1+k^2)\left(\frac{ky+x}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2+F_1=0.$$

Eftersom de numeriska värdena av storheterna $\frac{y-kx}{\sqrt{1+k^2}}$

och $\frac{ky+x}{\sqrt{1+k^2}}$ äro avstånden till linjerna $y=kx$ och $y=-\frac{1}{k}x$ resp., inses att, om dessa linjer tagas till koordinataxlar, x- och y-axel resp., kurvans ekvation blir

$$r(1+k^2)x^2+q(1+k^2)y^2+F_1=0$$

eller $$A_1x^2+C_1y^2+F_1=0$$

om $$A_1=r(1+k^2)$$

$$C_1=q(1+k^2).$$

Skall nu (5) vara identisk med (2) erhålles följande system:

$$r+qk^2=A$$

$$q+rk^2=C$$

$$k(r-q)=B.$$

Varur härledes

$$A_1+C_1=A+C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$A_1-C_1=(r-q)(1+k^2)=B\left(\frac{1}{k}+k\right) \quad (7)$$

$$A-C=(r-q)(1-k^2)=B\left(\frac{1}{k}-k\right) \quad (8)$$

Av (7) och (8) härledes

$$(A_1-C_1)^2-(A-C)^2=4B^2$$

eller $$A_1-C_1=\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Vi kunna alltid antaga k positiv. Av (7) se vi då, att i (9) tecknet plus bör tagas, om B är positiv, minus, om B är negativ.

(8) kan skrivas

$$\frac{2k}{1-k^2}=\frac{2B}{A-C}=\operatorname{tg} 2\alpha,$$

om vi sätta $$\operatorname{tg}\alpha=k.$$

Av (6) och (9) härledes

$$A_1C_1=AC-B^2,$$

som diskuteras på vanligt sätt.

Vi betrakta nu fallet $AC - B^2 = 0$.

(1) kan då skrivas

$\frac{A}{C}x^2 + \frac{2B}{C}xy + y^2 + \frac{Dx}{C} + \frac{Ey}{C} + \frac{F}{C} = 0$ (från fallet $C = 0$ bortses) men $A = \frac{B^2}{C}$

$$\therefore \quad \left(y + \frac{B}{C}x\right)^2 + \frac{Dx}{C} + \frac{Ey}{C} + \frac{F}{C} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Vi vilja nu bringa (10) under formen

$$\left(y + \frac{B}{C}x + r\right)^2 + q\left(y - \frac{Cx}{B} + t\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

(11) kan skrivas

$$\left(\frac{Cy + Bx + Cr}{\sqrt{B^2 + C^2}}\right)^2 + \frac{C^2 q}{B\sqrt{B^2 + C^2}} \cdot \frac{By - Cx + Bt}{\sqrt{B^2 + C^2}} = 0.$$

Vi inse nu att, om linjen $y + \frac{B}{C}x + r = 0$ tages till x-axel och $y - \frac{Cx}{B} + t = 0$ till y-axel, kurvans ekvation erhåller formen $y^2 = \pm 2px$,

där tecknet lätt bestämmes och $2p$ är det numeriska värdet av

$$\frac{C^2 q}{B\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

Eftersom (10) skall vara identisk med (11) erhålles systemet:

$$2r + q = \frac{E}{C}$$

$$\frac{2Br}{C} - q\frac{C}{B} = \frac{D}{C}$$

$$r^2 + qt = \frac{F}{C}$$

varur t. ex. $$q = \frac{(BE - CD)B}{C(B^2 + C^2)}$$

$$\therefore\ 2p=\left|\frac{(BE-CD)C}{(B^2+C^2)\sqrt{B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{BE-CD}{(A+C)\sqrt{C(A+C)}}\right|.$$

Uttrycket för $2p$ ger anledning till en intressant diskussion.

Exempel 1.

$x^2+y^2+2xy+2x-3=0$. (Se Collin: Analyt. geometri.)

Ekvationen kan skrivas

$$(x+y)^2+2x-3=0$$

eller $$(x+y+\tfrac{1}{2})^2+x-y-3\tfrac{1}{4}=0$$

eller $$\left(\frac{x+y+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{x-y-3\frac{1}{4}}{\sqrt{2}}=0.$$

Tages alltså $x+y+\frac{1}{2}=0$ till x-axel och $x-y-3\frac{1}{4}=0$ till y-axel, blir parabelns ekvation

$$y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

om den uppåt riktade delen är pos. x-axel.

Exempel 2.

$$144x^2+25y^2-120xy-1690x-4056y+28561=0.$$

(Se Collin.)

$$(12x-5y)^2-338(5x+12y-\tfrac{1690}{2})=0$$

eller $$\left(\frac{12x-5y}{13}\right)^2-26\cdot\frac{5x-12y-84{,}5}{13}=0.$$

Parabelns ekvation blir $y^2=26x$, om den uppåt riktade linjen $12x-5y=0$ tages till pos. x-axel och $5x+12y-84{,}5=0$ till y-axel. Vertex' koordinater bestämmas lätt.

Anmärkning rörande asymptoter: Är $AC-B^2<0$, kan storheten $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ upplösas i reella faktorer och (2) sålunda skrivas

$$(y-k_1x)(y-k_2x)+F_2=0,$$

där k_1 och k_2 äro asymptoternas vinkelkoefficienter.

*

Avsikten med denna uppsats har varit att visa, hur de resultat, som erhållas enligt den traditionella metoden med xy-termens bortskaffande genom vridning, kunna härledas på annan väg. Några exempel på ellipsen och hyperbeln ha vi ej ansett lämpligt anföra, då vår metod för kurvans konstruktion här sammanfaller med den hävdvunna. Vad åter parabeln beträffar, avviker vårt förfaringssätt från det vanliga, varför ett par exempel nog kunna försvara sin plats.

Till vilken form hör en under allmän form given andragradskurva?

Av H. STENMARK.

För att besvara denna fråga brukar man ju söka kurvans ekvation i ett system, erhållet genom vridning av det ursprungliga och i den nya ekvationen låta xy-termen försvinna. Vill man blott söka svaret på frågan ovan, ställer sig denna metod dock ganska omständlig.

Nu karakteriseras emellertid andragradskurvorna fullständigt av deras förhållande i oändligheten. Ellipsen går aldrig, parabeln i en och hyperbeln i två skilda riktningar ut i oändligheten. Söker man vinkelkoefficienterna för en andragradskurvas asymptoter, bör man alltså, om kurvan är en ellips, få imaginära värden på vinkelkoefficienten, om den är en parabel ett enda värde och om man har med en hyperbel att göra, två skilda reella värden.

Vad beträffar bestämningen av asymptoterna kan man t. ex. förfara sålunda. Vi definiera en asymptot såsom en tangent i en oändligt avlägsen punkt på kurvan och anse sedan som vanligt tangenten vara gränsläget för en sekant, vars båda skärningspunkter med kurvan sammanfalla.

Om kurvans ekvation är

$$a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+2a_{10}x+2a_{01}y+a_{00}=0$$

och sekantens $y=kx+l,$

så fås skärningspunkternas x-koordinater ur

$$x^2(a_{20}+2a_{11}k+a_{02}k^2)+2x(a_{11}l+a_{02}kl+a_{01}k+a_{10})+ \\ +2a_{01}l+a_{02}l^2+a_{00}=0.$$

För att sekanten skall bli en tangent fordras att diskriminanten

$$(a_{11}l+a_{02}kl+a_{01}k+a_{10})^2- \\ -(a_{20}+2a_{11}k+a_{02}k^2)(2a_{01}l+a_{02}l^2+a_{00})=0,$$

och för att dessa skärningspunkter skola ligga i oändligheten, att nämnaren i uttrycket för x blir lika med noll.

Alltså

$$a_{20}+2a_{11}k+a_{02}k^2=0,$$

och av den föregående likheten

$$a_{11}l+a_{02}kl+a_{01}k+a_{10}=0.$$

Likheten mellan uttrycket

$$a_{20}+2a_{11}k+a_{02}k^2$$

och andragradstermerna i den givna ekvationen är tydlig.

Karaktären av rötterna till

$$a_{20}+2a_{11}k+a_{02}k^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bestämmes av diskriminanten

$$D=a_{11}^2-a_{20}\cdot a_{02}.$$

Alltså: om $D>0$, är kurvan en hyperbel
» $D=0$, » » » parabel
» $D<0$, » » » ellips,

om endast huvudfallen medtagas.

Man kan även lätt på denna väg bestämma den vinkel, koordinatsystemet behöver vridas, för att kurvornas ekvationer skola erhållas under enkla former.

Beträffande parabeln ger roten till ekvationen (1) ovan genast tangenten för vridningsvinkeln, då ju grenarnas riktning i oändligheten just är axelns riktning.

Gå vi till hyperbeln, se vi av figurerna, att den sökta vinkeln v antingen (fig. 1) fås av likheten

$$v=u_1+\frac{u-u_1}{2}-90^\circ$$

d. v. s.

$$v=\frac{u_1+u}{2}-90^\circ$$

eller (fig. 2) ur

$$v=\frac{u+u_1}{2},$$

där v och $90^\circ+v$ äro axlarnas vinklar med positiva riktningen av x-axeln. I första fallet blir $2v=u+u_1-180$, i

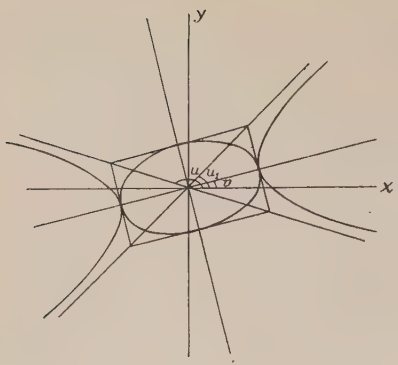


Fig. 1.

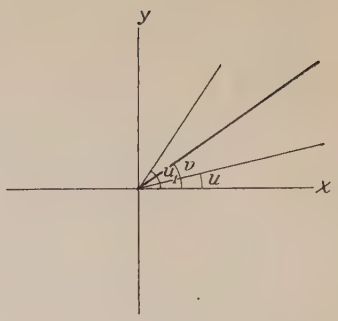


Fig. 2.

senare $2v=u+u_1$, men i bägge fallen (vilken vridning som utföres är ju för vårt ändamål likgiltigt)

$$\operatorname{tg} 2v=\operatorname{tg}(u+u_1),$$

eller då k och k_1 äro rötter till (1) och $k=\operatorname{tg} u$ och $k_1=\operatorname{tg} u_1$

$$\operatorname{tg} 2v=\frac{k+k_1}{1-kk_1} \quad \text{och,}$$

då $k+k_1=-\dfrac{2a_{11}}{a_{02}}$ och $kk_1=\dfrac{a_{20}}{a_{02}}$,

$$\operatorname{tg} 2v=\frac{-2a_{11}}{a_{02}\left(1-\dfrac{a_{20}}{a_{02}}\right)}=\frac{2a_{11}}{a_{20}-a_{02}}.$$

Samma uttryck på tangenten för dubbla vridningsvinkeln gäller även, om kurvan är en ellips, vilket kan visas t. ex. sålunda. Att ellipsen skall vridas lika mycket som en hyperbel med samma axlar är självklart. Man behöver således blott visa att sambandet mellan koefficienterna för andragradstermerna i två sådana figurer är sådant, att man i båda fallen får samma värde på uttrycket

$$\frac{2a_{11}}{a_{20}-a_{02}}.$$

Om man på vanligt sätt söker ekvationerna för en ellips med axlarna $2a$ och $2b$ och medelpunkten i origo, samt

ena brännpunkten i $(c\cos\alpha,\ c\sin\alpha)$ där $a^2=b^2+c^2$ samt för en hyperbel ävenledes med medelpunkten i origo och axlarna $2a$ och $2b$ men ena brännpunkten i

$$(c_1\cos\alpha,\ c_1\sin\alpha) \text{ då } c_1^2=a^2+b^2,$$

så fås att ellipsens ekvation blir

$$x^2(a^2-c^2\cos^2\alpha)+y^2(a^2-c^2\sin^2\alpha)-2c^2xy\sin\alpha\cos\alpha=a^2b^2$$

och hyperbelns

$$x^2(a^2-c_1^2\cos^2\alpha)+y^2(a^2-c_1^2\sin^2\alpha)-2c_1^2xy\sin\alpha\cos\alpha=$$
$$=-a^2b^2.$$

För ellipsen får man:

$$\frac{2a_{11}}{a_{20}-a_{02}}=\frac{-2c^2\sin\alpha\cos\alpha}{c^2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$$

och för hyperbeln, som det ju måste vara

$$\frac{2a_{11}}{a_{20}-a_{02}}=\frac{-2c_1^2\sin\alpha\cos\alpha}{c_1^2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

Kurvuppritning i andra ringen.

Av AD. MEYER.

Före den nuvarande skolstadgans införande behandlades maxima och minima alltid i samband med andragradsekvationens teori i andra ringen på reallinjen, ofta även på latinlinjen. Numera ser det, av läroböckerna att döma, ut som om meningen vore att uppskjuta hela denna teori till differentialkalkylen, där den ju i varje fall måste förekomma.

Detta kan nog hava skäl för sig, ty i annat fall kommer ju samma sak att behandlas två gånger. Men då ju numera funktionsbegreppet och funktionernas grafiska framställning blivit nästan det centrala i gymnasiekursen, och intet lämpar sig så väl härför som detta, så torde nog många lärare, liksom jag, fortfarande önska bibehålla det i andra ringen, åtminstone om klassen är så god, att tiden tillåter det. Detta desto mer, som denna metod framför metoden med differentialkalkyl åtminstone har det företrädet, att man även får med sådana maxima och minima, som äro oändligt stora och sådana som antagas för $x=\infty$.

Till dessas tjänst vill jag därför söka göra en på teorin för maxima och minima baserad systematisk framställning av den grafiska framställningen av funktioner av formen $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, där f och φ äro högst andragradsfunktioner, samt några andra sådana att eleverna kunna lösa ekvationen med avseende å x.

Härvid vill jag då först anmärka, att det blott är fråga om kurvornas *allmänna form*. Ett insättande av *godtyckliga* x-värden för att få fram detaljerna anser jag från mate-

matisk synpunkt av föga värde. De värden som böra insättas äro egentligen blott sådana som göra y till 0 eller ∞, samt x-värdena 0 och ∞ ävensom maxima och minima. Inflexionspunkter fås naturligtvis på detta sätt ej fram, ej heller *sneda* assymptoter, utan kan detta lämnas till den senare framställninger i differentialkalkylen, men icke desto mindre ger det en ganska fyllig bild av viktiga egenskaper hos de ifrågakommande funktionerna.

I. *Förutsättningar.*

I första ringen hava lärjungarna genom statistiska kurvor o. d. fått koordinatbegreppet klart, liksom axlarnas positiva och negativa riktningar, betydelsen av negativa koordinater, och också genom insättning av godtyckliga x-värden i en ekvation fått en viss föreställning om maxima och minima, även om dessa begrepp äro långtifrån klara. I andra ringen böra förut hava uppritats diagram till logaritmfunktionen samt de trigonometriska funktionerna mellan 0 och 90°, möjligen t. o. m. mellan 0 och 180°. Därigenom har då även vunnits begreppet *assymptot.*

Vidare måste före de egentliga kurvkonstruktionernas början läran om ett andragradsuttrycks reella eller imaginära rötter vara genomgången, samt ett andragradsuttrycks upplösning i faktorer — med ett ord teorin för andragradsekvationen.

II. *Inledning till maxima och minima.*

Första huvudgruppen $y=f(x)$

(där f är av andra graden).

Vi övergå nu till vidare behandling av maximum och minimum genom att medelst punkter konstruera

1) $y=x^2$

och påpeka, att y har sitt minsta möjliga värde 0 för $x=0$, ty det kan aldrig bliva negativt för något reellt x-värde. Det har således *ett minimum=0 för* $x=0$. Det påpekas även, att det blir $= +\infty$ för $x=\pm\infty$, och att funktionens

allmänna form kan tecknas utan kännedom om något annat än dessa tre värden.

Sedan övergår man till

2) $y=(x-2)^2$, som har y min$=0$ för $x=2$,
3) $y=x^2\pm 1$ » » y » $=\pm 1$ » $x=0$,
4) $y=(x-3)^2\pm 2$ » » y » $=\pm 2$ » $x=3$

och uppritar kurvorna genom att påpeka, att y är $=+\infty$ för $x=\pm\infty$ och uttaga deras värde för $x=0$, samt för $y=0$, om x då blir reellt.

Man kan nu övergå till den generella

5) $y=c(x-a)^2+b$ (där c är >0), som har ett min$=b$ för $x=a$, och härvid, liksom vid de föregående, påpeka, att man väl skall skilja på minimets storlek och det x-värde för vilket det antages.

Vidare tagas kurvor av typen

6) $y=b-c(x-a)^2$, som har ett max$=b$ för $x=a$, ävensom denna generella ekvation.

Härefter inse lärjungarna lätt, att varje uttryck av formen

$$y=px^2+qx+r$$

genom kvadratens komplettering kan bringas till en av formerna 5) eller 6), och första läxan kan bliva att uttaga maximum eller minimum för vilka som helst dylika uttryck.

III. *Annan lösningsmetod. — Relativa maxima och minima.*

Man påpekar nu, att om för y insättes ett värde $>$ maximum eller $<$ minimum och ekvationen löses med avseende å x, så får x nödvändigtvis imaginära värden, insättas själva maximum eller minimum så fås två lika rötter, under det att i annat fall två reella, olika, värden måste erhållas. Man kan således bestämma maximum och minimum på annat sätt, nämligen genom lösning av ekvationen t. ex.

$$y=x^2-5x+6 \text{ ger löst}$$
$$x=\tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+y}.$$

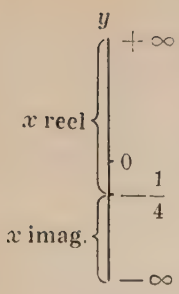


Fig. 1.

Uppritas nu linjen för y och avsättes på densamma (fig. 1) det värde som gör radikanden $= 0$, nämligen $-\frac{1}{4}$, så synes genast, att för att x skall bliva reell, måste y vara $\geqq -\frac{1}{4}$. $-\frac{1}{4}$ är således minimum, vilket antages för $x = +\frac{5}{2}$.

$$y = 2 - x^2 + 2x \text{ ger } x = 1 \pm \sqrt{3 - y}$$

och y-linjen blir vidstående (fig. 2). Vi se då genast, att y har ett max $= 3$, som antages för $x = 1$.

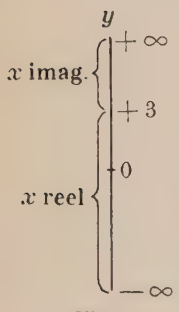


Fig. 2.

Kurvan uppritas med hjälp av förut nämnda punkter.

Man påpekar nu, att om kurvan följes från vänster till höger, ett sätt som vi i det följande alltid följa, så kommer den vid ett minimum alltid att börja stiga från att förut hava fallit (övergång från nedförsbacke till uppförsbacke), vid ett maximum tvärtom. Vi kunna då taga detta till definition av maximum och minimum, så att detta ej behöver vara det absolut största, resp. minsta värde som funktionen kan antaga, utan blott det största (resp. minsta), som den antar inom ett visst område, så att funktionen kan hava flera maxima och minima, och att ett maximum t. o. m. kan vara mindre än ett minimum (fig. 3).

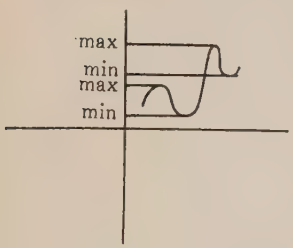


Fig. 3.

IV. *Andra huvudgruppen.*

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

där f och φ äro funktioner av högst andra graden (f kan även vara konstant). Bråket oförkortbart.

Här påpekas nu först några allmänna regler, nämligen:

1) Mot varje x-värde svarar alltid *ett och endast ett* värde

på y, så att kurvan kan följas från vänster till höger, från $-\infty$ till $+\infty$ utan avbrott eller slingor, och att mot varje y-värde svarar *högst* två x-värden, men att även intet eller ett reellt x-värde är möjligt. Om denna regel ej stämmer, så är kurvan felteckned eller felräknad. Således äro kurvor sådana som *a*), *b*), *c*) i fig. 4 omöjliga i detta fall.

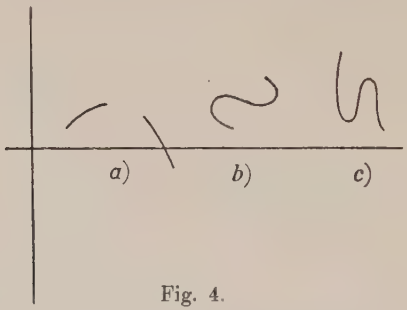


Fig. 4.

2) För varje x-värde som gör nämnaren $= 0$, blir $y = \infty$[1], och vi hava där en med y-axeln parallell assymptot, och denna måste vara assymptot till båda brancherna. Regeln är då, att kurvan återkommer från motsatt sida, men den kan även komma från samma sida, och då är ∞ ett maximum eller minimum. Exempel härpå:

a) $y = \frac{1}{x}$ (fig. 5). *b*) $y = \frac{1}{x^2}$ (fig. 6). *c*) $y = -\frac{1}{x^2}$ (fig. 7).

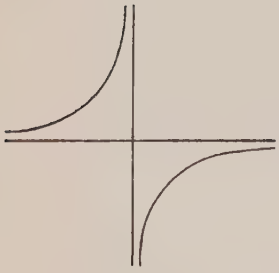


Fig. 5.

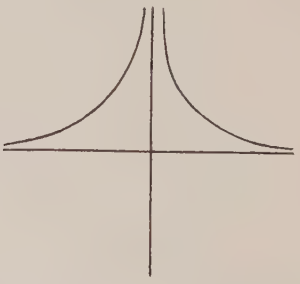


Fig. 6.

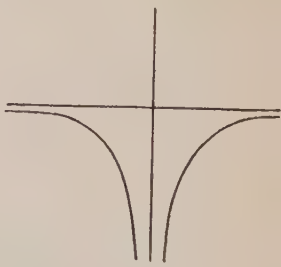


Fig. 7.

[1] Täljaren kan nämligen ej samtidigt vara $= 0$, ty då skulle bråket kunna förkortas.

Det senare inträffar blott, när nämnaren är en jämn kvadrat, varom mera framdeles.

3) För att evaluera bråkets värde för $x=\infty$, förkortar man detsamma med den högsta dignitet av x som förekommer i nämnaren, såsom t. ex.

$$a)\ \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}=\frac{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{1+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}}=1$$

$$b)\ \frac{px^2+ax+b}{qx^2+cx+d}=\frac{p+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{q+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}}=\frac{p}{q}$$

$$c)\ \frac{x+a}{x^2+b}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}}{1+\frac{b}{x^2}}=0$$

$$d)\ \frac{px^2+qx+r}{ax+b}=\frac{px+q+\frac{r}{x}}{a+\frac{b}{x}}=\infty \quad \text{o. s. v.}$$

Härav synes även, att y alltid får samma värde för $x=+\infty$ och $x=-\infty$, så att högst en med x-axeln parallell assymptot kan finnas, och att denna alltid är assymptot åt båda hållen, vilket antingen kan ske normalt eller med maximum eller minimum. En sådan assymptot förekommer alltid och endast, om täljarens gradtal är $\leqq$ nämnarens. Exempel härpå:

a) $y=\frac{2x}{x^2+1}$ (fig. 8) *b)* $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (fig. 9)

c) $y=\frac{1}{x^2+1}$ (fig. 10).

Av andra huvudgruppen finnas 4 typer, beroende på antalet av nämnarens reella rötter. Inom vardera typen finnas reguljära kurvor och biformer.

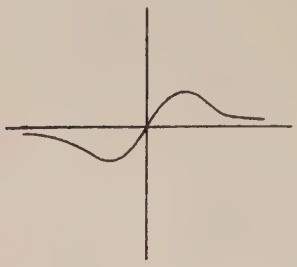


Fig. 8.

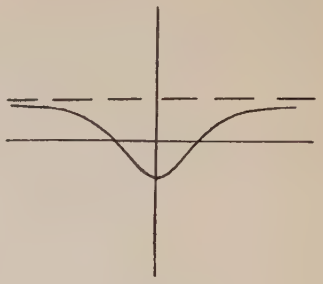


Fig. 9.

Typ 1. Nämnaren ingen reell rot. Då fås ingen med y-axeln parallell assymptot. För $x = \infty$ kan y ej bliva $= \infty$, emedan täljarens gradtal är $\leqq$ nämnarens. Man får således alltid en med x-axeln parallell assymptot och kurvan måste hava ett maximum och ett minimum, av vilka ettdera i biformen antages för $x = \infty$.

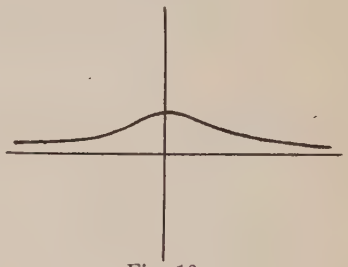


Fig. 10.

Exempel:

a) reguljära

1) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ (uppritad i fig. 8)

2) $y = \dfrac{(x+1)^2}{2x^2+1}$

3) $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$

4) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$ o. s. v.

Vi utföra här fullständigt behandlingen av n:r 3. De övriga utföras på samma sätt.

$$y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3} \quad \text{ger} \quad x=\frac{y+1}{y-1}\pm\sqrt{-\frac{2(y+1)(y-2)}{y-1}}.$$

y-linjen får därför utseendet (fig. 11).

y har således ett max $=2$ för $x=3$
och ett min $=-1$ » $x=0$
och vi få följande tabell:

x	y
$-\infty$	$+1$
-3	∓ 0
∓ 0	-1 min
$+1$	∓ 0
$+3$	$+2$ max
$+\infty$	$+1$

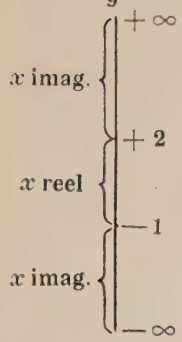


Fig. 11.

Vilja vi även se, var kurvan skär assymptoten, så finna vi, att $y=1$ för $x={}^3/_2$. Vi få således följande kurva (fig. 12).

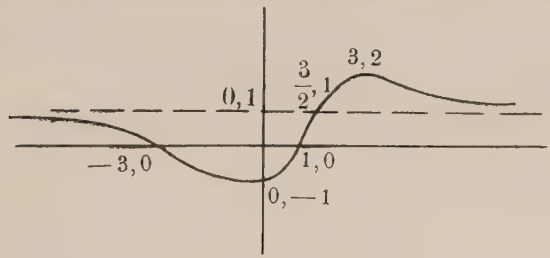


Fig. 12.

I biformen uppträder maximum eller minimum för $x=\infty$, såsom i de förut anförda exemplen

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{och} \quad y=\frac{1}{x^2+1} \quad \text{(figg. 9 och 10).}$$

Typ 2. Nämnaren en reell rot. Nämnaren således av första graden. Då finnes en med y-axeln parallell assymptot, kurvan består av två brancher (och blir alltid en hyperbel).

Här kan antingen finnas ingen med x-axeln parallell assymptot eller en sådan, beroende på om täljaren är av

andra graden eller lägre. I det senare fallet kan tydligen intet maximum eller minimum finnas, i det förra kunna bådadera finnas eller ingendera. Vi räkna såsom reguljärt fall då de finnas, såsom biformer då de saknas.

Såsom exempel på det reguljära fallet anföra vi:

1) $y=\frac{x^2+4}{x}$ 2) $y=\frac{x^2+5x+4}{x}$

3) $y=\frac{x^2-3}{2-x}$

och på biformen:

4) $y=\frac{x-1}{x}$ 5) $y=\frac{x+1}{2x-1}$

6) $y=\frac{x^2-3x-4}{x-1}$.

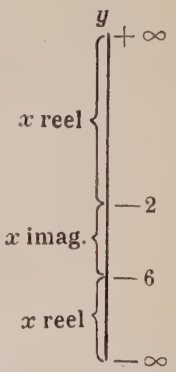


Fig. 13.

Vi utföra räkningen för n:is 3 och 6.

Ex. 3. $y=\frac{x^2-3}{2-x}$ ger $x=-\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(y+2)(y+6)}$.

y-linjen blir (fig. 13), och vi få

y max $=-6$ för $x=3$

y min $=-2$ » $x=1$,

och vi få tabellen:

x	y
$-\infty$	$+\infty$
$-\sqrt{3}$	± 0
0	$-{}^3/_2$
$+1$	-2 min
$+\sqrt{3}$	∓ 0
$+2$	$+\infty$
$+3$	-6 max
$+\infty$	$-\infty$

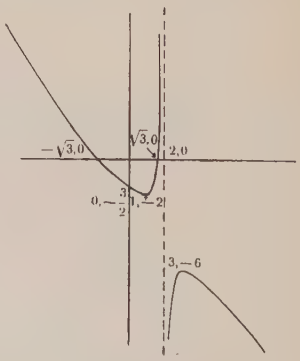


Fig. 14.

och kurvans allmänna form blir såsom fig. 14.

Ex. 6. $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x-1}$ ger $x=\dfrac{y+3}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{y^2+2y+25}$.

Den har därför intet maximum eller minimum, och tabellen blir:

x	y
$-\infty$	$-\infty$
-1	∓ 0
0	$+4$
$+1$	$\pm\infty$
$+4$	$+0$
$+\infty$	$+\infty$

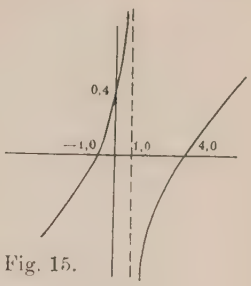


Fig. 15.

och kurvans allmänna form blir såsom i fig. 15.

Typ 3. Nämnaren två olika reella rötter.

Två med y-axeln parallella assymptoter, en assymptot parallell med x-axeln, ty nämnarens gradtal $\geqq$ täljarens. Kurvan har 3 brancher. Alltid ett maximum och ett minimum eller intetdera. Oändligheten kan aldrig vara maximum eller minimum, men väl kan ett sådant antagas för $x=\infty$. Vi beteckna, liksom förut, såsom reguljära sådana där maximum och minimum förekomma, det andra som biform.

Exempel:

a) reguljära

1) $y=\dfrac{x-4}{x^2-3x-3}$

2) $y=\dfrac{4}{4-x^2}$

3) $y=\dfrac{2(x^2+9)}{9-x^2}$

b) biformer

4) $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$

5) $y=\dfrac{2-x^2}{x^2-3x+2}$.

Tabellerna utföras för nämnis 1, 3 och 5.

1) $y=\dfrac{x-4}{x^2-3x-3}$ ger $x=\dfrac{3y+1}{2y}\pm\dfrac{\sqrt{21}}{2y}\sqrt{(y-\frac{1}{3})(y-\frac{1}{7})}$.

Max $=\frac{1}{7}$ för $x=5$, min $=\frac{1}{3}$ för $x=3$.

x	y
$-\infty$	-0
$-\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}$	$\mp\infty$
0	$+\frac{4}{3}$
$+3$	$+\frac{1}{3}$ min
$\dfrac{\sqrt{21}+3}{2}$	$\pm\infty$
4	$+0$
5	$+\frac{1}{7}$
$+\infty$	$+0$

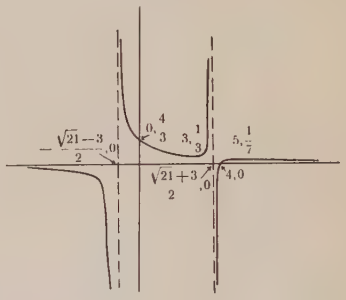


Fig. 16.

Kurva fig. 16.

3) $y=\dfrac{2(x^2+9)}{9-x^2}$ ger $x=\pm\dfrac{3}{y+2}\sqrt{(y+2)(y-2)}$.

Max $=-2$ för $x=\infty$, min $=+2$ för $x=0$.

x	y
$-\infty$	-2
-3	$\mp\infty$
0	$+2$ min
$+3$	$\pm\infty$
$+\infty$	-2 max

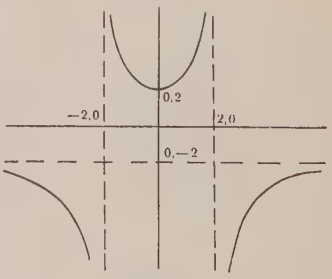


Fig. 17.

Kurva fig. 17.

5) $y=\dfrac{2-x^2}{x^2-3x+2}$ ger $x=\dfrac{3y}{2(y+1)}\pm\dfrac{1}{2(y+1)}\sqrt{y^2+8}$.

x	y
$-\infty$	-1
$-\sqrt{2}$	0
0	1
1 ∓ 0	$+\infty$
$+\sqrt{2}$	0
2 ∓ 0	$+\infty$
$+\infty$	-1

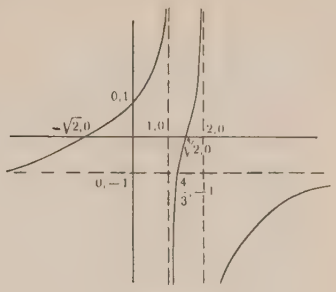


Fig. 18.

varjämte y blir $=-1$ för $x={}^4/_3$.

Kurvan finnes i fig. 18.

Typ 4. Nämnaren har två lika rötter.

De båda med y-axeln parallella assymptoterna sammanfalla, varigenom oändligheten alltid blir ett maximum eller minimum. Är ∞ ett maximum så finnes ett annat minimum och tvärtom. Detta kan stundom antagas för $x=\infty$. En med x-axeln parallell assymptot finnes alltid.

Exempel:

1) $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}$

2) $y=\dfrac{4x}{(x+2)^2}$

3) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

4) $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$.

Kurvorna äro med hjälp av det föregående så lätta att konstruera, att det ej här behöver anföras några tabeller och konstruktioner.

V. *Tredje huvudgruppen.*

y är en funktion innehållande rotmärken.

Här överger oss lagen, att varje x skall hava sitt reella y. Vid lösningen måste man kvadrera så länge tills alla rotmärkena försvinna, och då får man ej blott den givna kurvan, utan även alla sådana som erhållas, då ett eller flera av rotmärkena växla tecken. Det är därför lämpligt att upprita den så erhållna kurvan, och sedan med olika färg eller på annat sätt markera de olika kurvorna. Då överger oss även lagen, att blott ett y motsvarar varje x och således även, att man blott får en med x-axeln parallell assymptot. Utom de vanliga maxima och minima får man då för de olika kurvorna även slutpunkter. Även enstaka punkter kunna förekomma.

Vi taga först några enkla exempel:

1) $y = \pm\sqrt{x}$ 2) $y = \pm\sqrt{1-x}$ 3) $y = \pm\sqrt{x-1}$.

Här fås tydligen en slutpunkt för vardera kurvan, men inga maxima eller minima.

4) $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ger $x = \pm\sqrt{-(y+1)(y-1)}$.

Här y imaginär för $x > 1$ och $x < -1$ och vi få y max $= 1$ för $x = 0$ och y min $= -1$ för samma x-värde. Dessa punkter tillhöra naturligtvis de båda olika kurvorna, och vi få två slutpunkter (1, 0) och (−1, 0), fig. 19.

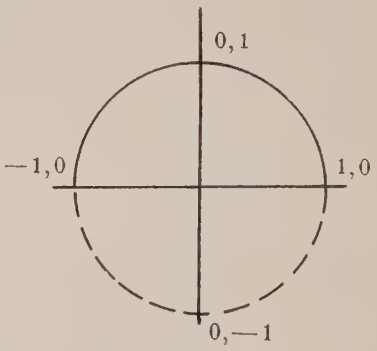


Fig. 19.

På samma sätt behandlas lätt

5) $y = \pm\sqrt{x^2+1}$ och

6) $y = x \pm \sqrt{1-x^2}$.

Alla dessa giva ju blott andragradskurvor, varför vi ej behöva upprita dem.

Något egendomligare te sig

7) $y = \pm \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (fig. 20), 8) $y = \pm \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (fig. 21),

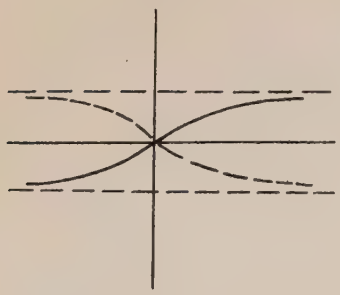


Fig. 20.

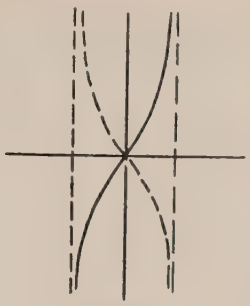


Fig. 21.

9) $y = \pm \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ (fig. 22), 10) $y = + \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ (fig. 23),

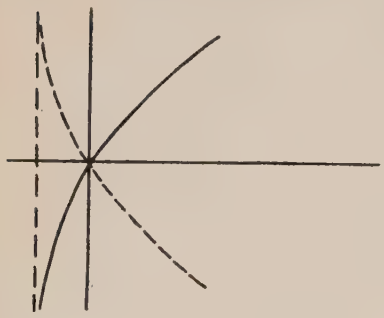


Fig. 22.

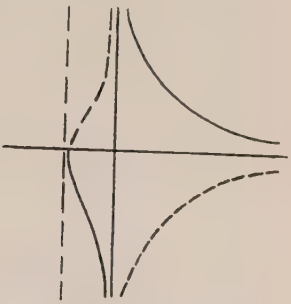


Fig. 23.

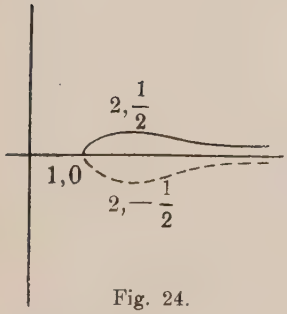


Fig. 24.

11) $y = \pm \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ (fig. 24).

Slutligen vilja vi behandla två något svårare kurvor:

12) $\alpha)$ $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,

$\beta)$ $y = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Genom lösning giva dessa

$$x = \pm \frac{y}{y^2 - 1} \sqrt{(y+1)(y-1)}.$$

x är således imaginär för $1 > y > -1$ utom $y = 0$.
y är imaginär för $1 > x > -1$ utom $x = 0$.

Vi få $y \max = -1$ för $x = \pm\infty$
$y \min = 1$ för $x = \pm\infty$
$y = \pm\infty$ för $x = \pm 1$.

Till kurvan α) höra alla punkter, där x och y hava samma tecken, till kurvan β) där de hava motsatta. Därjämte är $x = y = 0$ en enstaka punkt tillhörande båda kurvorna.

Vi få därför fig. 25 där α) är den fulldragna, β) den prickade kurvan.

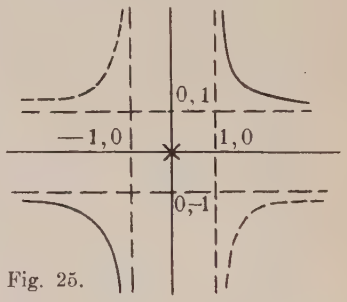


Fig. 25.

13) $\alpha)\ y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, $\beta)\ y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$,
$\gamma)\ y = -\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, $\delta)\ y = -\sqrt{x} - \sqrt{1-x}$.

Dessa giva lösta:

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{2} \sqrt{-(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})}.$$

Vi se att x är reellt blott för $\sqrt{2} \geqq y \geqq -\sqrt{2}$, liksom y är reellt för $1 \geqq x \geqq 0$

$y \max = \sqrt{2}$ för $x = \frac{1}{2}$
$y \min = -\sqrt{2}$ » $x = \frac{1}{2}$.

Vi få följande tabell:

x	y_α	y_β	y_γ	y_δ
0	$+1$	-1	$+1$	-1
$\frac{1}{2}$	$+\sqrt{2}$ max	0	0	$-\sqrt{2}$ min
1	1	1	-1	-1

Kurvan blir således den som fig. 26 utvisar, mycket påminnande om en lemniskata. Beteckningarna äro

för α) ——, för β) . . . ., för γ) – – – –, för δ) + + + +.

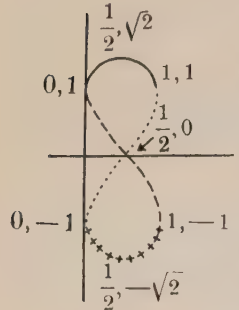


Fig. 26.

Det är naturligen ej min mening, att alla dessa exempel skola genomgås i andra ringen, särskilt torde hela den 3:e huvudgruppen böra uteslutas, då man ju numera ej plägar diskutera rotekvationer. Ej heller behöver det tagas så systematiskt som här är gjort, men det är säkert av nytta, att läraren sätter sig in i systemet för att sedan därav meddela lärjungarna vad han kan anse nyttigt och tiden tillåter samt giva uppgifter åt mer intresserade lärjungar.

Om figurtal- och fakultetserier.

Av AUG. SÖRENSEN.

I nedanstående tab. 1 angivas de sex första termerna i figurtalserierna av 1:a t. o. m. 6:e *ordningen.* Termerna i den första serien utgöras av idel ettor, under det att i de

Tabell 1.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

följande serierna n:te termen är $=$ summan av n termer av den närmast föregående serien. Betecknas den n:te termen i figurtalserien av p:te ordningen med $\varphi_p(n)$ och summan av de n första termerna med $s_p(n)$, har man således

$$\begin{cases} s_1(n)=n\,, & \qquad (1) \\ s_p(n)=\varphi_{p+1}(n)=s_{p+1}(n)-s_{p+1}(n-1)\,, & \qquad (2) \end{cases}$$

vilka båda villkor tillsammans utgöra en fullständig definition på en figurtalserie av godtycklig ordning.

Läsas figurtalen diagonaliter i riktningen

$$\varphi_r(1),\ \varphi_{r-1}(2),\ \varphi_{r-2}(3),\ \ldots\ \varphi_{r-n+1}(n),\ \ldots,\ \varphi_1(r),$$

där summan av index och termens ordningsnummer är konstant $(=r+1)$, finner man de bekanta binomial-koefficienterna i utvecklingen av $(1+x)^{r-1}$. Man inser lätt, att detta även i fortsättningen måste vara fallet. Om man nämligen ersätter de i tab. 1 uppskrivna talen med binomial-koefficienterna, skrivna diagonaliter i den angivna riktningen, såsom visas i nedanstående tab. 2, och betraktar

Tabell 2.

$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{4}$	$\binom{5}{5}$
$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{4}$	
$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{3}$		
$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{2}$			
$\binom{4}{0}$	$\binom{5}{1}$				
$\binom{5}{0}$					

två i nämnda riktning på varandra följande koefficienter $\binom{r}{k}$, $\binom{r}{k+1}$ och den mitt under den senare stående koefficienten $\binom{r+1}{k+1}$, så visa identiteterna

$$\binom{r+1}{k+1}=\binom{r}{k}+\binom{r}{k+1},$$

$$\binom{r}{r}=1;$$

att den så erhållna tabellen måste överensstämma med den först betraktade.

Man får därför

$$\varphi_{r-n+1}(n)=\binom{r-1}{n-1},$$

således, för $r-n+1=p$,

$$\varphi_p(n)=\binom{n+p-2}{n-1}$$

och således enligt (2) summationsformeln:

$$s_p(n)=\varphi_{p+1}(n)=\binom{n+p-1}{n-1}=\binom{n+p-1}{p} \quad . \quad . \quad (3)$$

Med tillhjälp av (3) deduceras lätt summationsformeln för de särskilt inom talteorien viktiga fakultetserierna. Med en fakultet förstås här ett uttryck av formen

$$\omega_p(r)=r\,(r+1)\,(r+2)\,\ldots\,(r+p-1).$$

[$\omega_p(1)$ blir således det som vanligen betecknas med $\underline{p}$ och $\omega_p(r)=\underline{p}\cdot\binom{r+p-1}{p}$].

Om vi här låta r antaga alla heltalsvärden från och med 1 till och med n, erhålles en fakultetserie, vars summa är

$$\Omega_p(n)=\sum_{r=1}^{n}\omega_p(r)=\underline{p}\cdot\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\underline{p}\cdot\sum_{r=1}^{n}\varphi_{p+1}(r)$$

$$=\underline{p}\cdot s_{p+1}(n)=\underline{p}\cdot\binom{n+p}{p+1}=\frac{\omega_{p+1}(n)}{p+1}. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

För att konstatera förefintligheten av en figurtalserie är det tillräckligt att undersöka termen $t_n=s_n-s_{n-1}$. Visar det sig, att t_n är $=s_p(n)$, så är $s_n=s_{p+1}(n)$.

Såsom exempel betrakta vi serien

$$\begin{aligned}\chi(n)=&\,1\,(1+2+3+\ldots+n)\\&+2\,(1+2+3+\ldots+n-1)\\&+3\,(1+2+3+\ldots+n-2)\\&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\&+n\cdot 1\,.\end{aligned}$$

Här är

$$\begin{aligned}
t_n &= \chi(n) - \chi(n-1) \\
&= 1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + n[n-(n-1)] \\
&= n(1+2+3+\ldots+n) - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots \\
&\qquad \ldots + (n-1)\,n] \\
&= \tfrac{1}{2} n^2 (n+1) - \Omega_2 (n-1) \\
&= \tfrac{1}{2} n^2 (n+1) - \tfrac{1}{3} \sigma_3 (n-1) \\
&= \tfrac{1}{2} n^2 (n+1) - \tfrac{1}{3} (n-1)\, n\, (n+1) \\
&= \binom{n+2}{3} = s_3(n),
\end{aligned}$$

således

$$\chi(n) = s_4(n) = \binom{n+3}{4} = \tfrac{1}{2\,4}\, n\,(n+1)\,(n+2)(n+3).$$

Något om toleransberäkning.[1]

Av KURT MOLIN.

En felberäkning har till uppgift att söka de gränser, inom vilka ett mätresultat alltid kommer att ligga, huru många gånger mätningen än upprepas under samma betingelser.

Avståndet mellan felgränserna kallas osäkerhet; från denna särskiljas mätningens systematiska fel, d. v. s. resultatets ensidiga förskjutning i förhållande till den sökta storhetens verkliga värde. Orsaken till osäkerheten är alltid att söka i de tillfälliga felens ofrånkomlighet, orsaken till systematiska fel kan däremot ej generellt angivas, utan måste i varje särskilt fall prövas. På grund av denna skiljaktighet inses, att systematiska fel kunna elimineras genom införande av en korrektion. De tillfälliga felen däremot kunna aldrig elimineras, deras inflytande kan endast nedbringas till en viss gräns.

1. Medgiva förhållandena upprepade mätningar, kan genom jämförelse av de därvid vunna resultaten värdet av de medtagna siffrorna direkt erhållas.

2. Är dessutom de likvärda resultatens antal n så stort, att Gauss' formler kunna användas, kan noggrannheten anges t. ex. genom något av felen E eller S; E är »medelfelet hos aritmetiska mediet» och S »sannolika felet hos aritmetiska mediet». Då »medelfelet hos en observation» ε

[1] Nedanstående rader hava tillkommit på uppdrag av redaktionen.

Mätteknikens betydelse för industrien vinner alltmer erkännande. I Danmark t. ex. har sedan många år tillbaka vid Polytekniske Læreanstalt meddelats undervisning i mätteknik. Även för oss framträder önskvärdheten av att speciell undervisning i mätteknik, lämpligen anknuten till fysiklaborationerna, inginge i utbildningen vid våra lägre tekniska undervisningsanstalter. Med all målmedveten mätteknik är toleransberäkning förbunden.

är lika med

$$\pm\sqrt{\frac{\Sigma \Delta_i^2}{n-1}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

där $\Delta_i = u_m - u_i$ är differensen mellan aritmetiska mediet av alla resultaten u_m och ett resultat vilket som helst u_i, så är $E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ och $S = \frac{2}{3}E$.[1]

3. Tillämpas dessa enkla formler direkt på resultaten av varje mätserie, erhålles ingen kunskap om de ingående faktorernas bidrag till osäkerheten. För sådan fordras kännedom om funktionssammanhanget f mellan de av varandra oberoende storheterna $x_1, x_2, \cdot x_i, \cdot x_q$, vilkas uppmätning kräves, för att den sökta storheten u skall bliva bekant.

$$u = f(x_1, x_2, \cdot x_i, x_q) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Talvärdena för storheterna x_i kunna vara behäftade med fel av olika natur, men här tagas endast i betraktande de rent tillfälliga felen Δx_i.

För att angiva noggrannheten hos mätresultatet kan till dess talvärde u fogas antingen medelfelet hos resultatet $\pm \varepsilon_u$ eller det maximala felet $\pm \Delta u_{\max}$, varefter siffervärdet på u avkortas i överensstämmelse med den fordran, som värdet på ε_u resp. $\Delta u_{\max}$ betingar, d. v. s. resultatet skall innehålla de siffror, som enligt felberäkningen visat sig vara bestämda utan fel, men dessutom den siffra, i vilkens kolumn felets första siffra visar sig.

För medelfelet hos resultatet gäller formeln[2]

$$\varepsilon_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \varepsilon_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \varepsilon_{x_2}^2 + \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

där $\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2} \ldots$ beräknas enligt (1).

När så få mätningar av varje storhet x_i föreligga, att formeln (1) och därmed även formeln (2) knappast kunna till-

[1] Se t. ex. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 1914, s. 2.
[2] Se t. ex. F. Kohlrausch, ibid. s. 7.

lämpas, användes det maximala felet. Detta föredrages dessutom i sådana fall, där felberäkningen ej åsyftar att bestämma felet med någon större noggrannhet, emedan uträkningen är väsentligt mindre arbetsam.

Villkoret för att felet Δu hos resultatet skall bliva lika med det maximala felet är, att de uppmätta storheterna x_i samtliga avvika från sina verkliga värden eller, då dessa aldrig kunna bestämmas, från sina ersättningsvärden, de aritmetiska medierna, med sina maximala fel $\Delta x_{i\max}$, och att dessutom alla tecken kombineras på sådant sätt, att varje term bidrager till att öka det numeriska värdet av Δu.

Som värde på $\Delta x_{i\max}$ kan betraktas mätningarnas variationsamplitud

$$\tfrac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})_i. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Då mycket ofta en fysisk lag är sådan, att ekv. (2) kan skrivas under formen

$$u = C\, x_1^{\varkappa_1} \cdot x_2^{\varkappa_2} \ldots x_i^{\varkappa_i} \ldots x_q^{\varkappa_q}, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

där C är en konstant, och där potenserna få hava alla reella värden samt 0, så beräknas Δu på så sätt, att formeln (5) först logaritmeras och sedan differentieras.

Alltså erhålles:

$$\log u = \log C + \varkappa_1 \log x_1 + \varkappa_2 \log x_2 \ldots + \\ + \varkappa_i \log x^i \ldots + \varkappa_q \log x_q$$

och

$$\frac{du}{u} = \varkappa_1 \frac{dx_1}{x_1} + \varkappa_2 \frac{dx_2}{x_2} \ldots + \varkappa_i \frac{dx_i}{x_i} \ldots + \varkappa_q \frac{dx_q}{x_q}. \quad \ldots \quad (6)$$

Differentialerna $dx_1, dx_2, \ldots dx_i, \ldots dx_q$ ersättas sedan av de genom uppskattning bestämda felens absoluta belopp

$$|\Delta x_{i\max}|.$$

Denna uppskattning grundar sig antingen på de vid mätningarna gjorda erfarenheterna (inställningsfel) eller på de använda hjälpmedlens prestationsförmåga (avläsningsfel). Ofta är det lika enkelt att begagna sig av formeln (4).

Väljes för de i formeln (6) ingående differentialerna så-

dana tecken, att alla termerna samverka till att öka det numeriska värdet av $\frac{du}{u}$, så blir $\frac{du}{u}$ ett maximum, vilket uttryckes genom formeln:

$$\left(\frac{du}{u}\right)_{max} = \pm\left(\left|z_1\frac{dx_1}{x_1}\right| + \left|z_2\frac{dx_2}{x_2}\right| \ldots + \left|z_i\frac{dx_i}{x_i}\right| \ldots + \left|z_q\frac{dx_q}{x_q}\right|\right), \quad (7)$$

som i ord kan återgivas av summationsregeln: det maximala, relativa felet hos resultatet $\left(\frac{du}{u}\right)_{max}$ är lika med numeriska summan av de ingående elementens relativa fel $\frac{dx_i}{x_i}$ multiplicerade med de potenser, med vilka resp. element ingå i funktionssammanhanget (5).

I en del fall kan den anförda metoden utsträckas även till funktionssammanhang, som ej äro av formen (5), om dessa genom approximationer kunna bringas till logaritmerbar form. Men då gäller summationsregeln också endast approximativt.

Formeln (6) kan erhållas ur funktionen (2) även på ett annat sätt. Utvecklas nämligen denna funktion av flera variabler i Taylors serie fås, om endast termer av första ordningen medtagas,

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_q}\cdot\Delta x_q \quad (8)$$

Genom division med u kan formeln (8) visas vara identiskt lika med formeln (6), ty

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = C x_1^{z_1}\cdot x_2^{z_2}\ldots z_i x_i^{z_i-1}\ldots x_q^{z_q}$$

och därför

$$\frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{z_i}{x_i}.$$

Sannolikheten för uppkomsten av det maximala felet i resultatet beror av antalet i mätningen ingående element:

sannolikheten minskas starkt, då elementens antal växer.[1] Därför ersättes lämpligen det maximala felet Δu_{max} med det praktiska felet Δu_p. Detta bör hava samma sannolikhet som felet Δx_{imax} hos ett element. Reduktionen av resultatets maximala fel till dess praktiska fel utföres av Hartmann på följande sätt:[2] denne menar sig hava påvisat att uttrycket $\frac{\Delta}{\varepsilon}$ är oberoende av mätningens natur, d. v. s. lika med en konstant k; ε är medelfelet för en observation och Δ är $\frac{1}{2}(x_{max} - x_{min})_i$ eller $(x_{max} - x_m)_i$ eller $(x_m - x_{min})_i$, där x_m är aritmetiska mediet av bestämningarna över storheten x_i. Talvärdet för konstanten ligger mellan 1,8 och 1,6.

Införes $\frac{\Delta x_i}{\varepsilon_{xi}} = k$ och $\frac{\Delta u_p}{\varepsilon_u} = k$, kan uttrycket (3) för medelfelet ε_u hos resultatet omskrivas sålunda

$$\varepsilon_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \varepsilon_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \varepsilon_{x_2}^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2 + \ldots\right]$$

eller

$$\Delta u_p = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2 + \ldots} \quad \ldots (9)$$

Bildas förhållandet mellan det praktiska felet och det maximala och betecknas detsamma med F, F får betydelse reduktionsfaktor, erhållas av (8) och (9):

$$\frac{\Delta u_p}{\Delta u_{max}} = F = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2 + \ldots}}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right| + \ldots} \quad \ldots (10)$$

Uttryckas de olika felbidragen i förhållande till ett av

[1] Jämf. K. Molin, Om sannolikheten för uppkomsten av det max. felet hos ett mätresultat. Norsk Mat. Tidsskrift (II). 1920.

[2] Jul. Hartmann, Maaleteknik, Köpenhamn 1914, s. 38.

dem t. ex. $\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1$ genom relationstalen r_1, r_2, $\cdot r_i$, $\cdot r_q$, sålunda

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = r_i \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1$$

och för symmetriens skull

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 = r_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1,$$

där $r_1 = 1$, erhålles

$$F = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots r_i^2 + \ldots r_q^2}}{r_1 + r_2 + \ldots r_i + \ldots r_q} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Hava de ingående elementen samma felbidrag, antager F värdet

$$F = \frac{1}{\sqrt{q}} .^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

För det fall att endast ett element ingår i funktionen (5), d. v. s. $q = 1$, blir resultatets praktiska fel lika stort som dess maximala.

Divideras täljare och nämnare i ekv. (10) med u finner man, att för de relativa felen gäller en motsvarande relation

$$\left(\frac{du}{u}\right)_p = \left(\frac{du}{u}\right)_{\max} \cdot F . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

För beräkning av F enligt formeln (11) fordras kännedom om relationstalen r_i. För dessa gälla enligt definitionen

$$r_i = \frac{z_i \cdot x_1 \cdot \Delta x_i}{z_1 \cdot x_i \cdot \Delta x_1} .^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Vid beräkningen av F avrundas i allmänhet r_i till heltal.

[1] Jämf. förhållandet mellan E och ε, s. 1.

[2] Formeln kan med hjälp av uttrycket $\frac{\Delta x_i}{\varepsilon_{x_i}} = k$ omskrivas till

$$r_i = \frac{z_i \cdot x_1 \cdot \varepsilon_{xi}}{z_1 \cdot x_i \cdot \varepsilon_{x_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,a)$$

Införes observationernas vikter, p_i, som äro omvänt proportionella mot medelfelens kvadrater, fås

$$r_i = \frac{z_i \cdot x_1 \cdot \sqrt{p_1}}{z_1 \cdot x_i \cdot \sqrt{p_i}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,b)$$

Det praktiska felet, som här ovan behandlats, lägges till grund för den i förhållande till felberäkningen omvända uppgiften, som uppstår med frågan, hur en storhet bör mätas, då en viss noggrannhet fordras, d. v. s. då det ej tolereras, att mätningens avvikelser från det sanna värdet, förorsakade av de tillfälliga felen, få överstiga en uppgiven gräns, den s. k. toleransgränsen eller enbart toleransen. Ju större noggrannhet ju mindre tolerans, ju mindre noggrannhet ju större tolerans.

Toleransberäkningen är till sin natur mera omfattande än felberäkningen. Först i det avseendet att vid mätningens planläggning i allmänhet flera metoder erbjuda sig, men dessutom däri att de experimentella hjälpmedlens noggrannhet måste väljas.

För toleransberäkningens genomförande begränsas problemet till att endast omfatta planläggning av mätning med bestämd tolerans enligt uppgiven metod och med givna hjälpmedel. Därvid är förutsatt att såväl metod som hjälpmedel medgiva den givna toleransen.

Till belysning av toleransberäkningens natur och betydelse anföras några synpunkter hämtade från inledningen till Hartmanns arbete om mätteknik.[1]

Varje kvantitativ behandling kräver en överslagsberäkning över avvikelserna mellan vad som åsyftas och vad som uppnås, därför att varje rationell framställning är en framställning med given tolerans, d. v. s. med en maximal avvikelse, som är tillåten, men som ej får överskridas. Trots den lätt insedda riktigheten av detta krav, förefinnes ofta en benägenhet att åsidosätta toleransberäkningen för strävandet att säkra uppnåelse av det önskade resultatet genom att så mycket större omsorg nedlägges på utförandet av varje särskild detalj i mätningen. Det är visserligen sant, att om de bästa hjälpmedel användas och med stor omsorg, så erhålles det eftersträvade resultatet, om detta kan nås. Men ofta har då mycket arbete nedlagts i onödan, ty som en generell regel gäller, att kravet på arbete

[1] J. Hartmann, ib.

och omsorg växer ojämförligt mycket snabbare än toleransen avtar. Det kan därför ej nog starkt framhållas, att vad det uteslutande kommer an på, är ej att detaljmätningen är så noggrann som möjligt utan så noggrann, som nödvändigt är.

Det är toleransberäkningens uppgift att klargöra, huru noggrant mätningen av varje särskilt element skall utföras, eller med andra ord att upplysa om vad som är väsentligt och vad som är oväsentligt vid en kvantitativ uppgift.

Denna kunskap om de ingående mätningarnas olika betydelse får naturligtvis ej användas så, att den leder till försummelse av mättekniken, utan fastmer till en målmedveten strävan att utforma densamma i de punkter, som äro av betydelse i stället för att bruka den i onödan.

Betecknas den givna toleransen uttryckt i procent med t, måste givetvis $\left(\frac{du}{u}\right)_p < t$. Fördenskull sättes $\left(\frac{du}{u}\right)_p = t_p = \frac{t}{\sigma}$, där t_p må vara den praktiska toleransen och σ säkerhetsfaktorn. Storleken av denna väljes i allmänhet till 2 eller 3.

Vidare är $\left(\frac{du}{u}\right)_p = \left(\frac{du}{u}\right)_{max} \cdot F$ enligt (13), därför

$$\left(\frac{du}{u}\right)_{max} = \frac{t}{F \cdot \sigma} = z_1 \frac{dx_1}{x_1} + z_2 \frac{dx_2}{x_2} + \ldots + z_q \frac{dx_q}{x_q} . \quad (15)$$

Vid en sammansatt mätning kunna följande olika fall förekomma.

1) Ett element (j) lämnar till $\left(\frac{du}{u}\right)_{max}$ ett bidrag $z_j \frac{dx_j}{x_j}$, som är avsevärt större än de övriga elementens bidrag. Skulle bidraget vara 5 à 10 gånger större än vardera av de andra bidragen, bruka dessa försummas. F antar då värdet 1, och hela toleransen t_p står till förfogande för uppmätning av elementet (j).

2) De ingående q elementen lämna bidrag till $\left(\frac{du}{u}\right)_{max}$ av samma storlek. Då blir $F = \frac{1}{\sqrt{q}}$, och för varje elements upp-

mätning står toleransen

$$t_{x_i} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1} \cdot \frac{t}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \frac{t}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

till förfogande. Eftersom $\frac{1}{\sqrt{q}}$ är minimivärdet av F för q stycken element, så blir $\left(\frac{du}{u}\right)_{\max}$ störst, och den största toleransen kommer de enskilda mätningarna till godo. Detta uttryckes genom den regeln för planläggning av en sammansatt mätning, som säger, att man alltid bör eftersträva, att de ingående elementens bidrag till $\left(\frac{du}{u}\right)_{\max}$ bliva lika stora.

3) För det allmänna fallet, då F beräknas enligt (11), fås

$$\left(\frac{du}{u}\right)_{\max} = \left|z_1 \frac{dx_1}{x_1}\right| (r_1 + r_2 + \ldots r_i + \ldots r_q)$$

eller

$$t_{x_i} = \frac{r_i}{r_1 + r_2 + \ldots r_i + \ldots r_q} \cdot \frac{t}{F\sigma} =$$

$$= \frac{r_i}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots r_i^2 + \ldots r_q^2}} \cdot \frac{t}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Härigenom är den varje element tillkommande toleransen bestämd.

*

Huru förhållandena gestalta sig för $q=2$, då

$$F = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2}; \quad \left(\frac{du}{u}\right)_{\max} = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \cdot \frac{t}{\sigma}; \quad t_1 = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \cdot \frac{t}{\sigma};$$

$$t_2 = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \cdot \frac{t}{\sigma},$$

framgår av diagram 1, för vilket $\frac{r_2}{r_1}$ är vald till oberoende variabel. Till grund för diagrammet ligga de i tabell 1 upptagna värdena.

Tabell 1.

$r_1 = 1$		$r_2 = 1$		F	$\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$	$\frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$	$\frac{r_1+r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$
r_2	$\frac{r_2}{r_1}$	r_1	$\frac{r_2}{r_1}$				
1	1	1	1	0,708	0,708	0,708	1,416
2	2	2	0,50	0,745	0,447	0,894	1,341
3	3	3	0,33	0,791	0,316	0,948	1,264
4	4	4	0,25	0,824	0,242	0,968	1,210
5	5	5	0,20	0,850	0,196	0,980	1,176
∞	∞	∞	∞	1	0	1	1

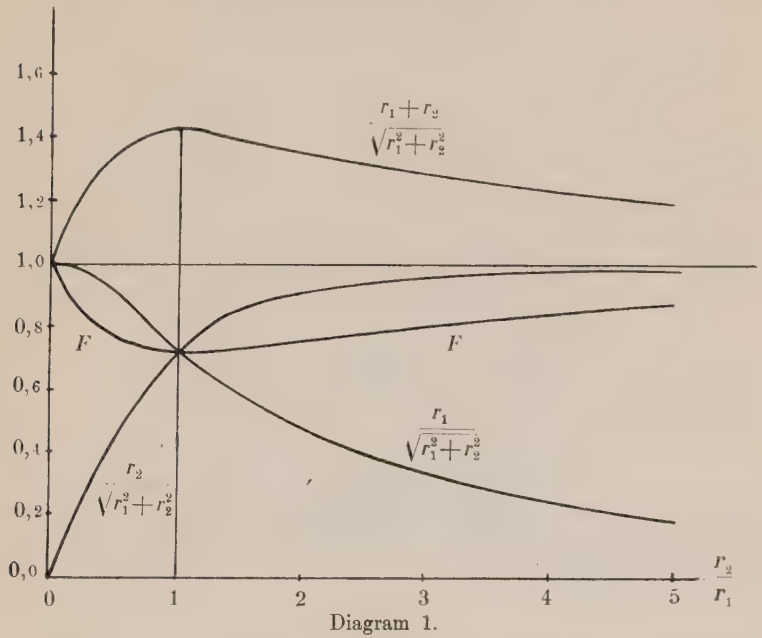


Diagram 1.

För att belysa toleransberäkningens användning må ett enkelt exempel anföras: tröghetsmomentet för en cirkulär cylinder skall uppmätas med en tolerans av 0,1 %. För det avsedda tröghetsmomentet gäller formeln

$$I = \tfrac{1}{2} Q r^2 = 1/8\, Q d^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Cylinderns diameter d antages vara c:a 5 cm och vikten Q c:a 800 gr. Toleransberäkningens uppgift är att besvara

frågan, hur noga diametern skall uppvägas och cylindern vägas.

Som värde på säkerhetsfaktorn väljes 2, därför $t_p = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}05\ \%$. Med lika fördelning av toleransen på båda bestämningarna blir $F = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Därför blir

$$\left(\frac{dI}{I}\right)_{\max} = \sqrt{2} \cdot 0{,}05 = 0{,}07\ \%,$$

och den varje element tillkommande toleransen

$$t_1 = t_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}07 = 0{,}035\ \%.$$

Eller direkt enligt formeln (16)

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}1}{2} = 0{,}035\ \%.$$

Ur (18) fås

$$\left(\frac{dI}{I}\right)_{\max} = \left|\frac{dQ}{Q}\right| + 2\left|\frac{d(d)}{d}\right|.$$

Diametern måste alltså uppmätas med en noggrannhet av

$$d(d) = \frac{d}{2} \cdot \frac{0{,}035}{100} = 0{,}009 \text{ mm}.$$

För vägningen fås:

$$dQ = Q \cdot \frac{0{,}035}{100} = 0{,}28 \text{ gr}.$$

Vägningen kan alltså utföras med en våg av mycket ringa känslighet, medan längdmätningen måste vara en precisionsmätning.

Några försök till läran om ljusets natur.[1]

Av BENKT SÖDERBORG.

1. Interfererande vattenvågor.

För framställande av vattenvågor användes en stor vanna, 80×80 cm, med botten av tjockt spegelglas och väggarna, 5 cm höga, av trä. Den uppställes med sin ena kant på bordet och med den motsatta kanten på ett stort trästativ.

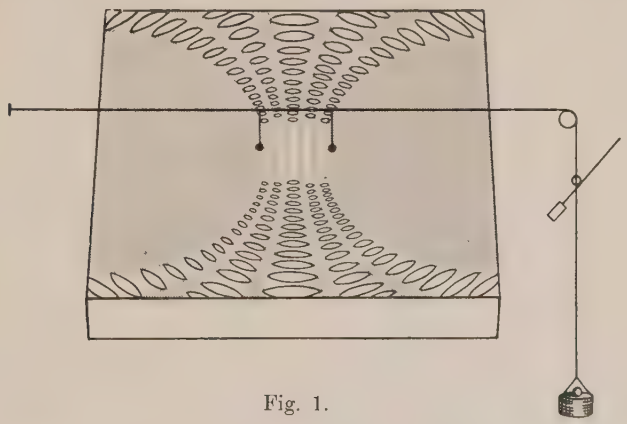


Fig. 1.

Vatten slås i till 1 à 2 cm:s djup. Tvärsöver vannan utspännes vågrätt en pianosträng av 0,4 – 0,5 mm:s diameter. Dennas ena ända fästes stadigt i ett stativ, varefter den lägges över en trissa utanför vannans motsatta sida och

[1] Förut tryckt i årsredogörelsen (1921—22) för Högre reallläroverket på Norrmalm i Stockholm.

spännes genom en vikt på ett par hundra gram i sin fritt nedhängande ända. Den horisontella och vertikala delen av strängen böra vara lika långa. Såsom oscillatorer tjänstgöra 2 stålkulor av 1 cm:s diameter, som på 10 cm långa järntrådar hänga ner från strängen. Strängens höjd över vattenytan avpassas så, att kulorna doppa ner 1—2 mm i vattnet. Oscillationerna åstadkommas med hjälp av en elektrisk ringklocka, på vars slagarm är fastlödd en liten ögla. Klockan fästes säkert i ett stativ på sådan höjd, att öglan griper om strängen ungefär 10 cm nedanför trissan. När kläppen slår, kommer strängens vertikala och horisontella del i regelbundna svängningar, och därmed också stålkulorna.

De uppkomna vågorna kunna iakttagas direkt på vattenytan, men observeras bäst genom projektion. Fördenskull placeras en båglampa (täljstenslampan) under vannan, varigenom vågorna avtecknas i taket. Mellan kulorna utbildas skarpa stående vågor. De i taket starkt belysta, stillaliggande linjerna (bukarna) fortsättas utåt av bortrullande vågor, skilda åt av regelbundna hyperbelgrenar (nodallinjer), som visa var vågrörelserna upphäva varandra. Man ser att vågorna på ömse sidor om en nodallinje ha motsatt fas.[1] — Företeelsen förklaras som bekant genom en ritning, där man omkring två medelpunkter ritar koncentriska och ekvidistanta cirklar och låter skillnaden mellan två successiva radier representera en halv våglängd.

Ju längre avståndet är mellan vågrörelsecentra, desto tätare komma maxima och minima för vågrörelsen att ligga på givet avstånd från kulornas sammanbindningslinje. Vid 20 cm:s avstånd mellan kulorna erhölls t. ex. 24 hyperbelgrenar (nodal-), vid 10 cm:s 14 st , vid 4 cm:s 4 st. och vid 2 cm:s 2 st.

Om man tänker sig det hela rotera omkring sammanbindningslinjen mellan vågrörelsecentra som axel, så generera hyperbelgrenarna hyperboloidmantlar, och dessa komma

[1] Jfr Grimsehl: Lehrbuch d. Physik, 3:e uppl., sid. 565 o. f.

att skära vannans vägg utefter tillnärmelsevis räta, parallella linjer. Man har en fullständig analogi till Fresnels spegelförsök.

För demonstration av reflexion och Huygens princip behöves en löstagbar vägg. En sådan förfärdigas av tunn plåt av samma längd som vannans inre kant. Den fästes vid vannans väggar genom klykor, som fastlödas i plåtens ändar, och kan således placeras tvärsöver vannan var som helst. I plåten äro på 5 cm:s avstånd från varandra utskurna några vertikala, rektangulära, 6 mm breda hål, som kunna täckas av löstagbara plåtbitar. Om endast en stålkula användes som oscillator och plåtväggen placeras några cm från kulan, så erhålles vacker interferens mellan vågorna från kulan och dess »spegelbild». Jämför Fresnels försök! — Om ett hål öppnas i väggen, så synas vågor utbreda sig halvcirkelformigt från hålet på andra sidan väggen. Man har en illustration till Huygens princip. Om ännu ett hål öppnas i väggen, så kan man påvisa interferens mellan dessa sekundära vågor, och har däri en förberedande illustration till ljusets böjning.

För att försöken skola lyckas väl, har man att iakttaga följande. Oscillationerna måste vara jämna, vilket de äro när kläppen höres arbeta jämnt, utan några överlagringar av svängningar. Dylika överlagringar uppträda alltid, om den hängande delen av strängen med sin spännande vikt råkat i pendelsvängning. Amplituderna skola vara lagom stora. Då kläppen är i vila, skall strängen hänga fritt ner genom den fastlödda öglan. Om amplituderna sedan bli för små, då kläppen sättes i gång, så kunna de ökas därigenom att man sakta förskjuter klockan med sitt stativ något utåt. Om den flyttas för långt, så bliva svängningarna för våldsamma. Själva kläppen bör ha lämplig tyngd. På den klocka, som jag använt, har den ordinarie kläppen, som var för lätt, skruvats bort från slagarmen och ersatts med en tyngre, 2 cm lång kläpp på 15 gr. De stativ, som uppbära strängens fasta ände, trissan och ringklockan, skola vara belastade, så att de stå stadigt. De två sistnämnda

stativen har jag haft placerade på ett stort trästativ. Den lodräta delen av strängen får då hänga ner genom ett trekantigt hål i trästativets mitt.

2. Fresnels spegelförsök.

Vid det läroverk, där undertecknad tjänstgör, finnes en Fresnels spegelapparat. De båda spegelplattorna av dimensionerna $5^1/_2 \times 3$ cm äro infattade i mässingsramar, av vilka den ena är fästad vid en ryggplatta, som med sin nedre hälft skjuter ut jämsides med den vridbara spegelns ram och uppbär den skruv och fjäder, medelst vilka vinkeln mellan speglarna regleras. För objektiv demonstration av interferensfransarna anordnas så, som fig. 2 visar.

Fig. 2.

Springan skall vara *mycket* smal, högst 0,1 mm, och belysas så skarpt som möjligt. Båglampan (täljstenslampan) placeras därför omedelbart intill springan. Vidare skall springan stå noga parallellt med speglarnas gemensamma kant (skärningslinjen mellan speglarnas plan). Till kontroll härav låter man linsen alstra en bild av springan på spegeln tätt intill den gemensamma kanten. Linsen bör ha kort brännvidd och skall giva en skarp bild av springan. Utmärkt resultat har ernåtts med en liten akromatisk lins ($d=4$ cm; $f=8$ cm), placerad så, att springan befunnit sig ungefär i brytningscentrum. Ett gott resultat erhålles också med en vanlig bikonvex lins ($d=11$ cm; $f=20$ cm). Spegeln placeras $^1/_2$ à 1 cm framför den bild, som linsen giver av springan (icke bilden av pos. kolets krater), således i det *konvergerande* strålknippet (fig. 3). Strålarnas infallsvinkel

skall vara nära 90°, således nära strykande infall. På spegeln skall då vid den gemensamma kanten synas en liten utsträckt ljusfläck. Vinkeln mellan speglarna regleras med skruven så, att först en bred, mörk linje synes skilja de båda ganska smala rektangulära ljusfläckarna på skärmen, som härröra från reflexion i vardera spegeln. Därefter ändras vinkeln så, att den mörka linjen nätt och jämnt försvinner. Då synas breda diffusa fransar, som uppkomma genom böjning omkring spegelkanterna. Vid ytterst ringa ytterligare vridning komma speglarna att reflektera ljus till en smal gemensam yta, och de skarpa, parallella, ekvidistanta, vackert färgade Fresnelska fransarna framträda. För inställning placeras en mindre skärm på armslängds avstånd, för demonstration en större skärm på 2—4 m:s avstånd från

Fig. 3.

spegeln. — Fransarna äro visserligen synliga i hela rummet, men då färgerna på avstånd flyta ihop, bör man icke underlåta att låta eleverna se dem även på nära håll. Om man — vid konvergent infall mot spegeln — ökar vinkeln mellan speglarna, så krypa fransarna ihop. Vid ett skärmavstånd på 3,5 m t. ex. varierades bredden från 7 st. på 5 cm till 7 st. på 2 cm. Utom dessa 7 syntes flera mindre skarpa. — Ljusstyrkan kan inom vissa gränser varieras med springan.

Försöket lyckas också ganska bra, om spegeln — såsom vanligen angives i läroböckerna — placeras strax bakom bilden av springan, d. v. s. i divergent ljus, men det förefaller, som om försöket bleve vackrare i konvergent ljus. Vid konvergent infall är det strålarna från de verkliga bilderna B_1 och B_2 (fig. 3), som interferera inom det på figuren skuggade området. Ju närmare B ligger den gemensamma kanten och ju mindre vinkeln mellan speglarna

överstiger 180°, desto bredare bli fransarna. Jämför försöket med vattenvågorna! Om vinkeln mellan speglarna ökas, så få de båda strålknippena från B_1 och B_2 snart intet område gemensamt, och det mörka gränsområdet uppkommer.

Försöket tillåter en uppmätning av storleksordningen av ljusets våglängd. Fördenskull projicieras B_1 och B_2 medelst en lins (helst akromatisk med stor brännvidd, kikarobjektiv) på skärmen, där man med skjutmått mäter avståndet mellan bilderna. Avståndet mellan fransarna uppmätes också på skärmen med skjutmått. Vid ett lektionsförsök erhöllos följande värden. 9 fransar upptogo en bredd av 48,9 mm; avståndet mellan bilderna av B_1 och B_2 på skärmen var 5,5 mm; linsens avstånd från B_1 B_2 och skärmen var resp. 45,7 cm och 406 cm, varav man såsom värde på ljusets våglängd erhåller

$$\frac{48{,}9}{9} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 45{,}7}{406} \cdot \frac{1}{(45{,}7+406) \cdot 10} \text{ eller } 0{,}000064 \text{ mm.}$$

Fresnels spegelförsök är klassiskt. Det är vackert för ögat. I sin genomskinliga enkelhet och påtaglighet utgör det en utmärkt inledning till ett av fysikens intressantaste kapitel. Det bereder slutligen en viss njutning att mäta en sådan storhet som ljusets våglängd med så grova medel som ett skjutmått och ett vanligt måttband. Att det trots detta icke fått en ordinarie plats bland gymnasiets fysiska försök, beror på de experimentella svårigheterna. Men dessa torde vara mindre än man är benägen att föreställa sig, och den lärare, som väl engång gjort sig förtrogen med försöket, har lön för mödan, både för sin egen skull och i sitt auditoriums tacksamma intresse, och han behöver icke frukta att misslyckas med det vid en återupprepning.

För att försöket skall lyckas, måste först och främst speglarnas vridningsaxel noga sammanfalla med spegelytornas skärningslinje. I annat fall kastas de båda strålknippena från B_1 och B_2 (fig. 3) åt olika håll och få intet område gemensamt. Av detta skäl är det som Volkmann betecknar den Fresnelska interferensspegeln såsom »einer

der unangenehmsten, optischen Schulapparate» (Poskes Zeitschrift XXII [1909], sid. 94), men i en senare uppsats i samma tidskrift (XXIV [1911], sid. 218) giver han anvisning på en lämplig form av densamma. — Därnäst torde uppmärksamheten böra inriktas på springan, och det är att tillråda att vid sökandet efter fransarna arbeta med en så smal springa, att den endast släpper igenom ett minimum av ljus.

3. Interferens i lika tjocka planparallella plattor.[1]

En horisontell ljusstråle från en ljuskälla L (fig. 4) träffar en vertikal planparallell platta P_V, vridbar omkring en vertikal axel. En del — strålen 1 — reflekteras, en annan

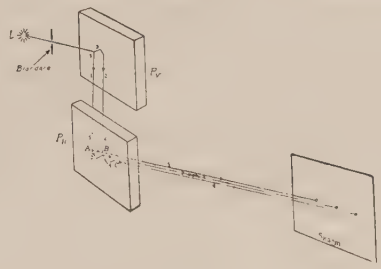


Fig. 4.

del — strålen 2 — brytes och reflekteras mot plattans baksida och går sedan ut parallell med strålen 1. De båda strålarna träffa sedan en fullkomligt lika tjock platta P_H, vridbar kring en horisontell axel, och uppdela sig här ånyo på samma sätt. Den mot P_V infallande strålen har således givit upphov till 4 strålar, men om plattorna stå fullkomligt parallella, så sammanfalla strålarna 2 och 3 (fig. 4). På en skärm erhålles med hjälp av en lins (icke utritad på figuren) 3 i *horisontell linje* liggande bilder av bländaröppningen. De punkter, vari strålarna utgå från plattan P_H, kallas på figuren för A, B och C.

[1] A. Classen: Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes, Göschens Verlagshandlung, Leipzig 1905. — Poskes Zeitschrift XVII (1904), sid. 35.

Om nu P_H vrides något omkring sin axel (fig. 5) så komma fortfarande A och B_2 att ligga i horisontell linje, men eftersom infallsplanet mot P_H icke längre är horisontellt, så komma strålarna 3 och 4 att lämna plattan i punkterna B_3 och C, som ligga *ovanför* (eller under) linjen AB_2. På skärmen synes sålunda mellersta bilden nu dubbel. Alla bilderna äro förskjutna uppåt (eller nedåt). I och II ligga fortfarande i horisontell linje, likaså III och IV, men III och IV ligga på en högre (eller lägre) linje än I—II.

Genom brytningen och speglingen i plattorna har man således uppdelat en stråle i 4, d. v. s. man har i stället för 1 ljuskälla erhållit 4 koherenta ljuskällor. Strålarna 2 och 3 kunna således betraktas såsom kommande från var sin av två *ovanför* varandra liggande ljuskällor, som äro spegelbilder av L, och deras interferensfransar bliva *horisontella* band eftersom de äro parallella med de speglande ytornas skärningslinje. Jämför Fresnels försök! För att interferens skall kunna påvisas med vitt ljus, måste de koherenta ljuskällorna ligga varandra mycket nära. Därför kan sådan interferens påvisas med strålarna 2 och 3, men också endast med dem. Häri ligger också anledningen till att man i allmänhet icke kan få fram interferensfransar vid horisontellt infallande vitt ljus genom att vrida den ena plattan kring en *vertikal* axel. Gångskillnaden mellan de interfererande strålarna blir då för stor.

Vid Fresnels spegelförsök äro de interfererande strålarna skilda åt ifrån utgångspunkten, och ljuskällan måste vara punktformig eller linjesmal. Ty om den har utsträckning i annan led än parallellt med spegelkanten, så få de parvis hophörande koherenta punkterna i spegelbilderna B_1 och B_2 (fig. 3) icke gemensam mittpunktsnormal. De olika mittpunktsnormalerna bilda vinkel med varandra, och interferensverkningarna från de olika punkterna komma att upphäva varandra. Men vid denna Brewsterska interferens i planparallella och lika tjocka plattor härstamma de från spegelbilderna utgående strålarna parvis från samma primära stråle, vilket har till följd, att interferens uppkommer

även om ljuskällan har utsträckning. De båda spegelbilderna bliva nämligen här icke vridna i förhållande till varandra, utan parallellförskjutna. Mittpunktsnormalerna till de hophörande koherenta punktparen sammanfalla visserligen icke, men de äro sinsemellan parallella, och först vid relativt stor utsträckning av ljuskällan komma interferensverkningarna från de olika punkterna att störa varandra. De Brewsterska interferensbanden lämpa sig därför bättre än de Fresnelska för objektiv demonstration. De äro icke så känsliga som de Fresnelska för fel i injusteringen, och framför allt framträda de tack vare den stora ljusstyrka, som kan användas, med stor tydlighet även för en stor åskådarskara. De kunna varieras från linjesmalhet till decimeterbredd, och med breda fransar fås färgerna att framträda briljant. Men teoretiskt är fenomenet icke av samma enkla struktur som det Fresnelska.

År 1919 inköptes för Norra reallärоverkets räkning ett par glasplattor ($5 \times 3 \times {}^1/_2$ cm) från Zeiss (pris 70 kr.). Avvikelsen från planparallellitet garanteras vara mindre än 3″. Dylika plattor kunna endast tillverkas på så sätt, att *en* platta noggrant slipas och därefter skäres itu. Plattorna ha monterats av läroverkets maskinist. De placeras i var sin plåthållare på mässingsfötter, som i sin tur stå på en grov mässingsskena, där den ena är fast och den andra förskjutbar utefter skenan. Den ena plattan med sin hållare är medelst en skruv vridbar kring en vertikal axel, den andra på samma sätt omkring en horisontell. Vanligen stå de inställda för 45° infallsvinkel, men kunna omställas för vilken infallsvinkel som helst.

För demonstration av interferensbanden användes som ljuskälla täljstenslampan. Nära denna placeras en bländare med olika diameter alltefter försökets art. Fransarna kunna mycket väl påvisas utan användning av någon bländare, blott man utestänger det direkta ljuset från lampan mot demonstrationsskärmen. Plattorna inställas parallella efter ögonmått. För denna inställning skjutas de intill varandra på ledskenan och dragas sedan åter isär till lämpligt av-

stånd, där den fot, som är rörlig, fastskruvas. Ljuset får falla in under 45° infallsvinkel. På skärmen 2—4 m från plattorna synes en ljusfläck, som har form efter den belysta delen av sista plattan.

Om fransarna icke nu synas i ljusfläcken, så vrider man mycket sakta på endera justeringsskruven. Då synas fransarna passera över fläcken. Sedan de väl framkommit regleras med skruven på P_{II}. Med denna skruv ändras vinkeln mellan plattorna. Om vinkeln minskas, så bli strimmorna bredare, och när plattorna stå i det närmaste parallella, bli de så breda, att en färgstrimma fyller ut så gott som hela fläcken, samtidigt med att strimmorna krokna — beroende på att plattorna ej äro fullt planparallella — och svänga över i mera vertikalt läge. Om P_{II} vrides successivt vidare och lutas över åt andra hållet, så vrida sig fransarna runt ett halvt varv just i övergången i det parallella läget och bli sedan allt smalare.

Eftersom ljuset är vitt, så synas icke obegränsat antal fransar, utan 7—10 st., de yttersta naturligtvis diffusa. Under vridningen av P_{II} vandra de ofta ur fältet och försvinna, vilket beror därpå att plattan icke vrider sig kring en fullt horisontell axel. Man återfår dem i så fall genast genom att mycket sakta vrida litet på P_I.

En mätning av ljusets våglängd kan företagas på samma sätt som vid det Fresnelska försöket. I stället för att där mäta avståndet mellan de båda bilderna av springan, mäter man således här förskjutningen mellan de båda bilderna II och III (fig. 5) av bländaröppningen. För övrigt sker mätningen på samma sätt. Vid ett försök upptogo 6 strimmor 3,4 cm, förskjutningen mellan ljusfläckarna var 3,2 mm och linsens avstånd från ljuskälla och skärm var respektive 43 och 320 cm. Härur erhålles som värde på ljusets våglängd 0,000067 mm. Om man silar ljuset genom färgade glas, så kan man visa, att man med t. ex. rött glas får fransarna längre isär än med blått glas.

Om man framställt fransarna och ställer en lins i vägen för strålarna ett gott stycke från plattorna, så synas fran-

sarna fortfarande. Linsen giver då de 3 (4) förminskade bilderna (fig. 5) av bländaröppningen någonstädes mellan linsen och skärmen, där man medelst en bländare av lämplig storlek kan släppa igenom vilket som helst av de tre strålknippena ensamt. Om strålknippet 1 släppes igenom, så fås inga fransar. Om n:r 4 släppes igenom, så synes svaga fransar, som härröra från strålen 4 och upprepad reflexion av 3 i P_H. Men om 2—3 släppas igenom, så synas fransarna i ännu ljärtare färger än förut, emedan de nu icke äro överlagrade av det vita ljuset från 1 och 4. För detta försök användes lämpligen breda fransar.

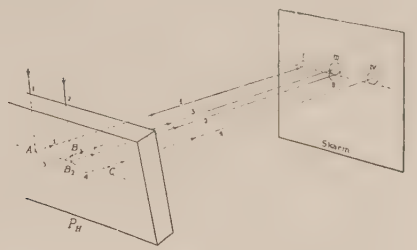


Fig. 5.

Med användande av en tillräckligt stark homogen ljuskälla, skulle man se *hela* ljusfläcken genomdragen av parallella, ekvidistanta, svarta linjer eller band. Då skulle dessa linjer också kunna fås att intaga vilken riktning som helst, vertikalt, horisontellt och snett, alltid parallellt med skärningen mellan plattornas plan. Om man använder en natriumlåga, så kunna naturligtvis icke dessa fransar projicieras, men man kan iakttaga dem direkt med ögat. Fördenskull placerar man lågan på något avstånd från den ena plattan (ingen bländare) och iakttar dess spegelbild i den andra. Denna synes då genomdragen av de regelbundna interferensfransarna i plattans hela utsträckning, och man kan nu ändra *båda* skruvarna (P_I:s och P_{II}:s) och få linjerna att intaga olika riktningar och avstånd. — Att interferensfransarna framträda trots ljuskällans stora utsträckning, beror därpå att ögat är ackomoderat för seende

på oändligt avstånd. I samma punkt på näthinnan sammanbrytas således strålar, som gått in mot ögat i en bestämd riktning, sinsemellan parallella. De ha visserligen gått ut från olika punkter på ljuskällan, men de strålpar (2 och 3), som var och en av dem givit upphov till, ha identiskt samma gångskillnad och samverka således vid interferensen, oberoende av om deras utgångspunkter i lågan i utgångsögonblicket ha haft olika svängningstillstånd.

Även med användande av vitt ljus kan man få fram några fransar i vertikal riktning, om man ändrar plattornas ställning på skenan, så att infallsvinklarna kunna göras små. Punkterna B_2 och B_3 komma då närmare varandra. På detta sätt kunde 5 breda vertikala fransar fås att passera efter varandra över synfältet.

"Rörliga modeller av trefasgenerator och -motor."

Av EINAR ZACHRISSON.

I »Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi» för sept. 1923 finnes införd en uppsats med ovanstående titel, författad av adj. John Lundberg. Undertecknad, ingenjör och lektor vid Elektrotekniska Fackskolan i Västerås, anhåller härmed att få framlägga några ord till kritik av den där använda framställningen av verkningssättet hos en trefasgenerator och -maskin, vilken delvis även återfinnes i Molls och Gallanders kända läroböcker.

Utgående från Siemens' T-ankare, förklarar t. ex. Moll uppkomsten av de tre trefasspänningarna i en maskin, som, förutom det roterande likströmsmagnetfältet, består av en stator med utpräglade konsekutiva poler, tre för varje likströmspolpar och på vilka växelströmslindningarna antagas anbringade. Ehuru vid denna anordning verkligen ett slags, om ock egendomlig, trefasström uppkommer, synes den dock icke vara lämplig som illustration på en trefassynkronmaskin, icke endast emedan den aldrig förekommer i praktiken, utan även därför att begreppet om verkningssättet hos en normal maskin lätt blir felaktigt. I den visade maskinen induceras nämligen spänningar, förutom genom att polariteten hos förbipasserande poler växlar, genom ändringar i den magnetiska fluxen, uppkomna på grund av variationer i den magnetiska kretsens permeabilitet. I en normal trefasgenerator åter är den magnetiska fluxen genom likströmspolerna konstant, och spänningarna induceras endast genom *rotation* i den magnetiska fluxen, ej i kombination med något slags *transformatorverkan*.

Hur en enkel modell för en modern trefasgenerator kan se ut, visas i fig. 1, där man direkt utgår från en sorts Grammes ring. På en dylik modell kan ju rotorn vara förbunden med en färgad skiva, som på sätt, adj. Lundberg visat, kan visa riktningen av spänningen i de visade ledarna, *a*, *b* och *c*.

Vill man komma det i praktiken verkliga utförandet ändå närmare in på livet, kan man undvika Grammes ring och rita fig. 2, där den yttre, overksamma ledaren i Grammes ring fått sig en nyttig plats anvisad.

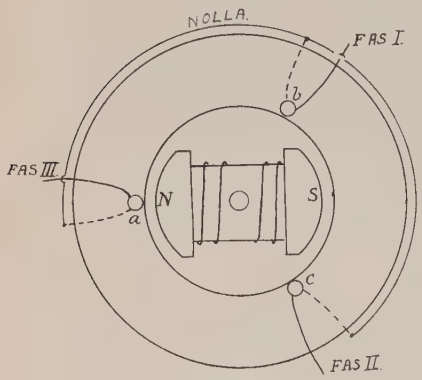


Fig. 1.

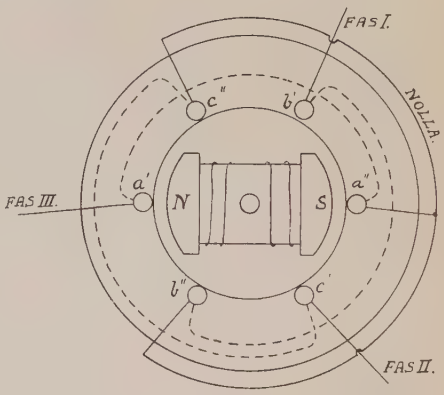


Fig. 2.

Vart en från det verkliga utseendet avvikande, för det fysikaliska förståendet skenbart tillrättalagd anordning kan leda, visar adj. Lundbergs artikel i fortsättningen, då modellen på asynkronmotorn skall behandlas. Om en verklig motor gjordes efter den modellen, skulle den nämligen vara behäftad med det felet att aldrig kunna gå igång av sig själv, endast möjligen hålla sig roterande, om den av ett yttre drivmoment bringats upp i hastighet. Denna maskin är nämligen ej en trefasmotor utan tre enfasmotorer, anordnade tillsammans. I en trefasmotor samverkar nämligen den ström, som induceras i en fas, med fluxen från de båda andra till att bilda drivmomentet, och strömmarna i de tre faserna bilda ej var och en sin flux, utan samverka till att alstra ett gemensamt, roterande fält.

Trefasinduktionsmotorn synes mig kunna förklaras även på elementarstadiet utan större svårighet (fig. 3). Tänk en maskin, med lika stator som den i fig. 1 och med en rotor, där ledarna kunna kortslutas, ansluten till vår generator! Om vi bortse från alla motstånd i ledningar och maskinlindningar, så inses, att för att strömstyrkan ej skall bliva oändligt stor, en e. m. k. måste induceras i varje fas i motorn, som är lika med, men motsatt den i generatorn genererade. Som generatorspänningarna inducerades av ett »mekaniskt» roterande magnetiskt fält, är det skäl misstänka, att även motorns motspänningar genereras av ett dylikt, fastän »elektriskt» roterande fält, och detta kan även visas vara fallet. När motorn går synkront, d. v. s. lika hastigt som det roterande fältet, kan någon spänning ej induceras i rotorledarna. Äro dessa slutna över ett motstånd eller direkt kortslutna, uppkomma i den vid undersynkron gång inducerade strömmar, som enligt Lenz' lag i utvidgad form vilja hindra rörelsen i fältet, d. v. s. avvikelsen från synkron gång.

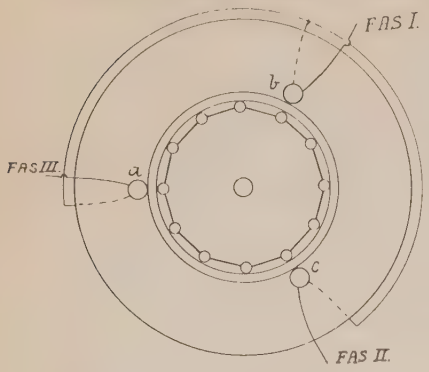


Fig. 3.

Jag tror ej, att ovanstående förklaringar äro mindre enkla än de tillrättalagda, som finnas i läroböckerna, och de äro dessutom riktiga och direkt lämpade att tillämpas på sådana maskiner, som dagligen kunna ses. Det är ju av vikt, att den student, som ämnar gå vidare på särskilt den tekniska banan, i skolan erhållit åskådningar, som sedermera ej behöva korrigeras, endast utvecklas.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Beräkning av excentricitet och parameter av en konisk sektion.

I denna tidskrifts första häfte har lektor Solander föreslagit en kortfattad kurs i analytisk rymdgeometri som förberedelse till behandlingen av de koniska sektionerna. Man kan då lätt härleda ekvationen för den erhållna sektionen, och ur denna ekvation får man sedan utan svårighet uttryck för excentriciteten, axlarna o. s. v. Emellertid ställer sig en direkt beräkning ungefär lika enkel, åtminstone om man väljer det vanliga, med hjälp av inskrivna klot utförda beviset som utgångspunkt för beräkningen. Detta bevis (se t. ex. Wahlgrens lärobok) tycks mig ej ställa större krav på eleverna än vad den föreslagna kursen i analytisk rymdgeometri gör, åtminstone så länge snittet är en ellips eller hyperbel. Då snittfiguren är en parabel äro kanske vissa av bevisets detaljer svåra att *minnas*, men om en realstudent ej är i stånd att på rak arm reproducera detta bevis, så är väl olyckan ej så stor.

I det följande inskränker jag mig till de fall, då snittfiguren är ett centralkägelsnitt (vid parabeln blir *beräkningen* givetvis enklare).

A. Beräkning av excentriciteten (fig. 1 och 2).

Figurerna förstås väl av sig själva. Enligt det nämnda beviset är avståndet mellan brännpunkterna

$$2c = FF' = OC = OO' \cos \alpha ,$$

och ellipsens stor-(hyperbelns transversal-)axel

$$2a = AA' = BB' = OD = OO' \cos v .$$

(α är alltså vinkeln mellan konens axel och det skärande

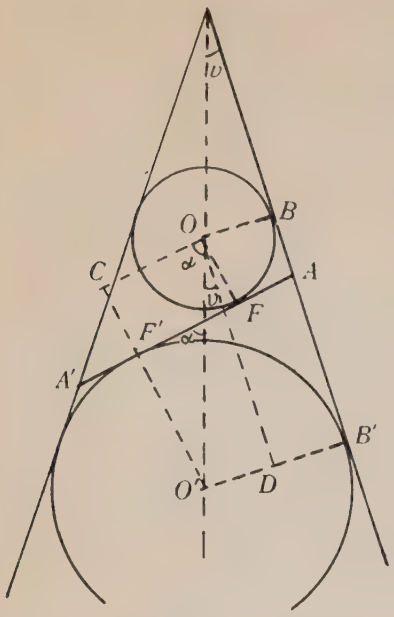


Fig. 1.

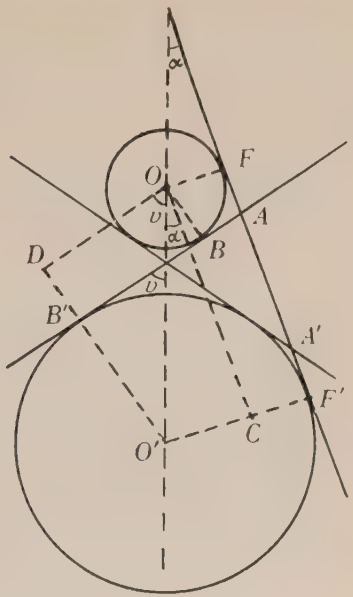


Fig. 2.

planet, $2v$ konens toppvinkel.) Härav erhålles omedelbart excentriciteten

$$e = c : a = \frac{\cos \alpha}{\cos v}.$$

B. Beräkning av stor-(transversal-)axeln (fig. 3 och 4).

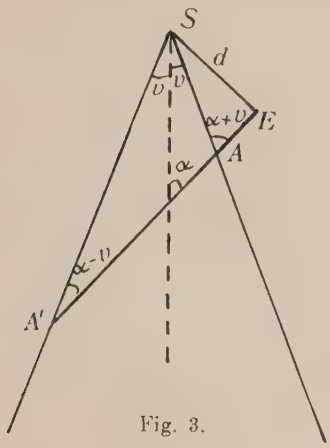


Fig. 3.

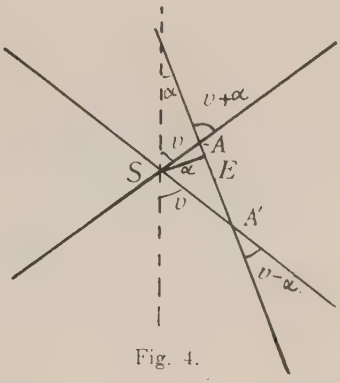


Fig. 4.

$SE = d$ är det skärande planets avstånd från konens topp S. Ur fig. 3 erhålles

$$2a = AA' = d \cot(\alpha - v) - d \cot(\alpha + v),$$

och ur fig. 4

$$2a = d \cot(v - \alpha) + d \cot(v + \alpha).$$

Båda uttrycken kunna sammanfattas i följande formel:

$$2a = \pm d [\cot(\alpha - v) - \cot(\alpha + v)] =$$

$$= \pm d \cdot \frac{\sin 2v}{\sin(\alpha - v) \sin(\alpha + v)},$$

där övre tecknet gäller för ellipsen, nedre för hyperbeln. Detta uttryck är ju ganska enkelt, men ett enklare uttryck erhålles för parametern.

C. Beräkning av parametern $2p$.

Man har ju (fortfarande gäller övre tecknet ellipsen, nedre hyperbeln)

$$p = \frac{b^2}{a} = \pm \frac{a^2 - c^2}{a} = \pm a(1 - e^2) =$$

$$= \frac{d}{2} \frac{\sin 2v (\cos^2 v - \cos^2 \alpha)}{\sin(\alpha - v) \sin(\alpha + v) \cos^2 v}.$$

Nu visas ju lätt, att

$$\sin(\alpha - v) \sin(\alpha + v) = \cos^2 v - \cos^2 \alpha.$$

Man får således till slut helt enkelt $p = d \operatorname{tg} v$, ett anmärkningsvärt enkelt resultat.

Frans Hansson.

Matematiska uppgifter.

157) Uttryck avståndet mellan medelpunkterna till en triangels omskrivna och inskrivna cirklar såsom funktion av dessa cirklars radier. (*Iter.*)

158) Att upprita en triangel, då man känner två höjder och den inskrivna cirkelns radie. (*Iter.*)

159) Om en aritmetisk serie har det hela talet a till första term och primtalet d till differens, så finnes bland dess

termer, om deras antal tages tillräckligt stort, alla termer i serien a, a^a, a^{a^2}, a^{a^3}, . . . a^{a^p}. (*Mebius.*)

160) I ett rätvinkligt koordinatsystem är given en cirkel, som tangerar y-axeln i origo O. På x-axeln tages en punkt A, och på y-axeln en punkt B. Genom AB:s skärningspunkter med cirkeln dragas tangenter, som skära y-axeln i P och Q resp. Visa att

a) $OP \cdot OQ$ är konstant då AB vrider sig kring A, och

b) $\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$ är konstant då AB vrider sig kring B.

161) Avgör hur många reella lösningar mellan 0 och 2π fås av ekvationen $\cos 2x = 2a \cos x$ för olika värden på a.

162) Att upprita en rätvinklig triangel, då de inskrivna cirklarnas radier i de trianglar, vari triangeln delas av medianen från den räta vinkelns spets, äro givna.

Lösningar till uppg. i häft. 1. 1923—24.

145) *Om a och b äro rätvinkliga koordinater, var skall punkten (a, b) ligga för att ekvationen*

$$4x^2+4(a+b)x+a^2+b^2=0$$

skola hava båda rötterna liggande mellan $+1$ och -1?

Enligt problemets ordalydelse måste rötterna vara reella, således ekvationens diskriminant $2ab$ vara >0. (a, b) måste således ligga i 1:a eller 3:e kvadranten. Problemets villkor kan även uttryckas så att rötterna ökade med 1 skola vara positiva och minskade med 1 skola vara negativa, således att

$$f(x-1) \equiv 4\left\{x^2 - x(2-a-b) + \frac{a^2+b^2}{4} - a - b + 1\right\} = 0$$

skall hava positiva, och

$$f(x+1) \equiv 4\left\{x^2 + x(2+a+b) + \frac{a^2+b^2}{4} + a + b + 1\right\} = 0$$

negativa rötter.

Villkoren bliva således

$$\begin{cases} 2-a-b>0 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2+a+b>0 & \ldots\ldots\ldots (2) \\ a^2+b^2-4a-4b+4>0 & \ldots\ldots (3) \\ a^2+b^2+4a+4b+4>0 & \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

(a, b) måste således ligga på de positiva sidorna av dessa 4 linjer, således inom det område i 1:a och 3:e kvadranten, som inneslutes mellan axlarna och de båda cirklarna (3) och (4) med olikhetstecknet ersatt av likhetstecken.

Anm. Skulle man ej fordra, att rötterna äro reella, utan blott att deras absoluta belopp skall vara <1, så fås genom lösning:

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\frac{\sqrt{2ab}}{2}=-\frac{a+b}{2}\pm i\frac{\sqrt{-2ab}}{2}$$

och således

$$x_1=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{2ab}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

och vi få då därjämte i 2:a och 3:e kvadranterna det område som ligger inom cirkeln $a^2+b^2=4$.

(Löst av *X* och *Iter.*)

146) *På en halvcirkel med diametern AB tages en punkt C, och CD fälles vinkelrätt mot AB. Figuren roterar kring AB. Visa, att det finnes en och endast en punkt C, sådan att summan av de ytor som genereras av bågen AC och linjen CD har till summan av de ytor som genereras av bågen BC och linjen CD ett givet förhållande.*

Sättes $AB=2r$, $AD=x$, $BD=2r-x$, så fås förhållandet

$$k=\frac{2\pi rx+\pi x(2r-x)}{2\pi r(2r-x)+\pi x(2r-x)}$$

varav $x^2(k-1)+4rx-4kr^2=0$, ... (1)

och om $2r-x$ sättes $=z$, så fås härav

$$z^2(k-1)-4krz+4r^2=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

För båda ekvationerna blir diskriminanten $=4r^2(k^2-k+1)$, som alltid är >0, dess minimum är nämligen $^1/_4$.

För (1) blir rötternas summa $=\frac{4r}{1-k}$ och deras produkt $\frac{4kr^2}{1-k}$, för (2) blir summan $\frac{4kr}{k-1}$ och produkten $\frac{4r^2}{k-1}$.

Om då $0 > k > 1$, så har (1) rötter av olika tecken, således blott en positiv rot möjlig; om $k < 1$, så är förhållandet detsamma med (2). Således är en och blott en punkt möjlig. Om $k=1$, så ger såväl (1) som (2) blott roten r.

(Löst av *X* och *Iter.*)

147) *Bevisa att summan*

$$s_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n$$

är jämnt delbar med n, om n är ett relativt primtal till 3.

Serien kan lätt summeras (se denna tidskr. årg. 2, sid. 9 och följ.), och vi få

$$s_n = \frac{n^3 - n}{3} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3},$$

varav satsen följer. (Löst av *X* och *Iter.*)

Anm. Satsen kan lätt utsträckas till summor av formen

$$\Omega_p(n) = 1 \cdot 2 \ldots p + 2 \cdot 3 \ldots (p+1) + \ldots$$
$$\ldots + n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1).$$

Summan av denna serie är

$$\Omega_p(n) = \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1}$$

och

$$\Omega_p(n-1) = \frac{(n-1)\,n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p+1},$$

varav synes, att om n och $p+1$ äro rel. primtal, så är $\Omega_p(n-1)$ delbar med n. (*Iter.*)

148) *A_1, B_1, C_1 äro mittpunkter på sidorna BC, CA och AB i triangeln ABC. Från en punkt P dragas PA, PB och PC, och genom A_1, B_1, C_1 linjer resp. parallella med dessa. Visa, att även dessa råkas i en punkt.*

Trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$ äro likformiga och omvänt likställda med avseende å den gemensamma tyngdpunk-

ten T. Om PT utdrages över T ett stycke $TP_1 = \frac{1}{2}PT$, så bevisas lätt, att trianglarna PTA, PTB, PTC äro likformiga med var sin av trianglarna P_1TA_1, P_1TB_1, P_1TC_1, varav följer, att PA, PB, PC äro parallella med var sin av P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1.

Satsen äger naturligtvis giltighet för alla triangelpar med parvis parallella sidor eller allmännare för alla likformiga och likställda eller omvänt likställda polygoner.

(*Iter.*)

149) *I en vid A rätvinklig triangel ABC är* $a = 4$ *cm och produkten av bissektriserna till* β *och* $\gamma = m^2 = 8$ *cm*^{2}. *Sök dessa vinklar.*

Om vinkeln vid a i stället för att vara rät, sättes allmänt $= \alpha$, så bli vinklarna mellan v_β och $b = \alpha + \frac{\beta}{2}$ och $\gamma + \frac{\beta}{2}$, och likaså mellan v_γ och c bliva vinklarna $= \alpha + \frac{\gamma}{2}$ och $\beta + \frac{\gamma}{2}$. Lätt fås då genom sinusteoremet

$$v_\beta = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}, \quad v_\gamma = a \frac{\sin \beta}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)},$$

således

$$\frac{m^2}{a^2} = \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\left(2\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} - 1 + \cos\alpha}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{2\left(\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Löses denna ekvation med avseende å $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$, så fås ett värde, som jämte $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ bestämmer β och γ.

För specialfallet $\alpha = 90°$ blir $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{m^2}{2a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$, och vi få, då $m^2 = 8$ och $a = 4$, $\begin{cases}\beta = 28°,16\\ \gamma = 61°,84\end{cases}$ eller tvärtom.

Anm. 1. Då vi för fallet $\alpha = 90°$ hade

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{m^2}{2a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

men detta måste vara $\leqq 1$, blir möjlighetsvillkoret:

$$\frac{m^2}{a^2} \leqq 2 - \sqrt{2}.$$

Att diskutera det allmänna fallet skulle föra oss för långt.

Anm. 2. Om i stället för bissektrisernas produkt, ytterVinkelbissektrisernas skulle vara $= m^2$, så blir ekvationen

$$\frac{m^2}{a^2} = \frac{2\left(\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}},$$

vilken för $\alpha = 90°$ ger

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{m^2}{2a^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

och möjlighetsvillkoret

$$\frac{m^2}{a^2} \leqq 2 + \sqrt{2}.$$

150) *En triangels sidor äro delade i resp. p, q, r delar, och delningspunkterna äro sammanbundna med motstående vinkelspets. I hur många stycken blir triangeln delad, förutsatt att aldrig tre linjer skära varandra i samma punkt?*

Uppgiften är ett specialfall av probl. 144 (årg. 6, h. 4) och därför lättare än detta.

Om a är delad i p och b i q delar och sammanbindningslinjerna dragas, så blir triangeln delad i pq trianglar genom $(p-1)+(q-1) = p+q-2$ linjer. Drages då från C en linje till c, så skär denna dessa linjer i $p+q-2$ punkter

och delas således i $p+q-1$ delar. Men varje av dessa stycken delar en av de pq deltrianglarna i två delar. Genom $r-1$ sådana linjer från C till c fås således triangeln delad i N delar, då

$$N=pq+(r-1)(p+q-1)=$$
$$=p(q-1)+q(r-1)+r(p-1)+1=$$
$$=pqr-(p-1)(q-1)(r-1).$$

(*X* och *Iter.*)

En exakt formel för ljusets brytning i en sfärisk yta.

Av C. A. MEBIUS.

§ 1. Låt DED_1 (fig. 1) vara ett meridiansnitt genom den sfäriska ytan, C sfärens medelpunkt, AEC den optiska axeln, A en lysande punkt, som utsänder strålen AD. Antag,

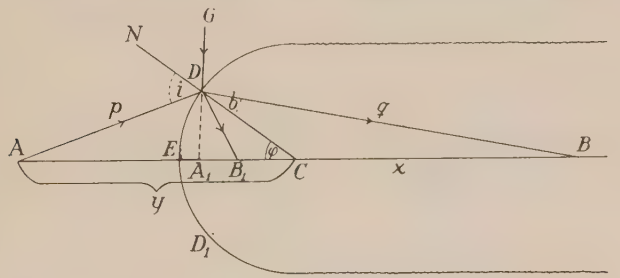


Fig. 1.

att denna stråle i D brytes, så att den träffar axeln i B. Antag vidare $CA=y$, $CB=x$, $AD=p$, $DB=q$, radien $CE=CD=r$, infallsvinkeln $ADN=i$, brytningsvinkeln $CDB=b$, elongationen för punkten D, d. v. s. medelpunktsvinkeln $ECD=\varphi$; låt den sfäriska ytan vara utåt konvex och kroppens brytningsindex n. Den brutna strålen DB:s riktning är då bestämd genom ekvationen

$$\frac{\sin i}{\sin b}=n\,.$$

Tillämpas sinusteoremet på trianglarna CAD och CBD, erhålles

$$\frac{\sin i}{y}=\frac{\sin\varphi}{p} \quad \text{och} \quad \frac{\sin b}{x}=\frac{\sin\varphi}{q}\,.$$

Divideras dessa ekvationer led för led, fås

$$n \cdot \frac{x}{y} = \frac{q}{p} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Tillämpas cosinusteoremet på samma trianglar, fås

$$p^2 = y^2 + r^2 - 2yr \cos \varphi$$
$$q^2 = x^2 + r^2 + 2xr \cos \varphi$$

och härav

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{x^2 + r^2 + 2xr \cos \varphi}{y^2 + r^2 - 2yr \cos \varphi} = \frac{n^2 x^2}{y^2} . \quad . \quad . \quad (2)$$

Denna ekvation anger sambandet mellan x och y, men vi skola giva den en annan form. Först skrives den

$$\frac{x^2 + r^2 + 2xr \cos \varphi}{x^2} = n^2 \cdot \frac{y^2 + r^2 - 2yr \cos \varphi}{y^2},$$

och sedan fås efter vartannat

$$1 + \frac{r^2}{x^2} + 2\frac{r}{x} \cos \varphi = n^2 \left(1 + \frac{r^2}{y^2} - 2\frac{r}{y} \cos \varphi\right);$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2 \cos \varphi}{rx} = n^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2 \cos \varphi}{ry}\right); \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{2}{rx}(1 - \cos \varphi) = n^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2n^2}{ry}(1 - \cos \varphi);$$

således

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{n}{y} - \frac{n}{r}\right)^2 + \frac{2}{r}(1 - \cos \varphi)\left(\frac{1}{x} + \frac{n^2}{y}\right) \quad . \quad . \quad (4)$$

eller

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{n}{y} - \frac{n-1}{r}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{n}{y} + \frac{n+1}{r}\right) = \frac{4}{r} \sin^2 \frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{n^2}{y}\right) . \quad . \quad (5)$$

En annan form får man genom att i ekv. 3 på annat sätt komplettera kvadraterna, nämligen

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos \varphi}{r}\right)^2 - \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} = n^2 \left(\left(\frac{1}{y} - \frac{\cos \varphi}{r}\right)^2 - \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$

eller

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos \varphi}{r}\right)^2 = \left(\frac{n}{y} - \frac{n \cos \varphi}{r}\right)^2 + (n^2 - 1)\frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

§ 2. De ekvivalenta ekvationerna (2)–(6) äro av andra graden i avseende på $\frac{1}{x}$. Det skulle sålunda kunna synas, som om man borde erhålla två lägen för bilden av ett givet föremål. Att detta ej kan vara händelsen, inses omedelbart därav, att en bruten stråle ej kan träffa den optiska axeln i mer än en punkt. Det andra värdet på x måste därför utgöra lösningen på ett annat problem, vars matematiska formulering leder till samma ekvation.

Att en främmande lösning kan erhållas, inses av det sätt, på vilket ekv. (2) kom till stånd. Man bildade värdet av $\frac{q^2}{p^2}$, dels med tillhjälp av cosinusteoremet, dels genom att kvadrera de båda membra av ekv. (1), varvid erhölls

$$\frac{q^2}{p^2} = n^2 \frac{x^2}{y^2}.$$

Nu är det tydligt, att samma värde skulle hava erhållits, om man i stället för ekv. (1) hade haft ekvationen

$$-n\frac{x}{y} = \frac{q}{p}.$$

En stråle genom punkten D, vilken brytes så, att denna relation är uppfylld, kommer att skära axeln AC i en punkt, vars avstånd från C bestämmes av det andra främmande x-värdet. Nu ha vi stillatigande räknat bildens B avstånd till medelpunkten positivt åt det håll, dit ljuset går, föremålets i motsatt riktning. I fig. 1 äro således $CA = y$ och $CB = x$ båda positiva, den främmande bildens x-värde måste därför vara negativt, bilden ligger därför på samma sida om C som A, och därför ligga också motsvarande brytningsvinkel och vinkeln CDB på olika sidor om normalen CDN.

En stråle GD, som träffar punkten D och har en sådan riktning, att infallsvinkeln GDN har storleken i, men ligger på motsatt sida om normalen CDN mot vinkeln ADN, brytes i riktningen DB_1, så att brytningsvinkeln CDB_1 har

storleken b. Låt den skära axeln i B_1, och antag sträckan $CB_1 = x_1$, sträckan $DB_1 = q_1$.

Ur trianglarna CAD och CDB_1 fås då enligt sinusteoremet

$$\frac{\sin i}{y} = \frac{\sin \varphi}{p} \quad \text{och} \quad \frac{\sin b}{x_1} = \frac{\sin \varphi}{q_1}$$

och enligt cosinusteoremet

$$p^2 = y^2 + r^2 - 2yr \cos \varphi,$$
$$q_1^2 = x_1^2 + r^2 - 2x_1 r \cos \varphi,$$

således liksom förut

$$\frac{q_1^2}{p^2} = \frac{x_1^2 + r^2 - 2x_1 r \cos \varphi}{y^2 + r^2 - 2yr \cos \varphi} = \frac{n^2 x_1^2}{y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

Men då B_1 nu ligger till vänster om C, är dess abskissa x negativ, och vi ha därför $x = -x_1$, d. v. s. $x_1 = -x$. Insättes detta värde i föregående ekvation (2a), så blir den identiskt lika med ekvation (2). Lösningen av denna i avseende på x, ger därför ock läget av punkten B_1. För den bild, som uppstår genom brytning av strålen AD ligga i enlighet med brytningslagarna vinklarna i och b på olika sidor om normalen CDN, för den bild B_1, som motsvarar den främmande lösningen ligga vinklarna $ADN = i$ och $CDB_1 = b$ på samma sida om normalen. (i och b ha bytt om tecken.)

§ 3. Den fysiska betydelsen av bilden B_1 är intressant och lätt att inse. Då DB och DB_1 båda bilda vinkeln b med normalen CD, så är den ena av B och B_1 den andras bild, uppkommen genom spegling i (den konkava) ytan DED_1. På samma sätt är, om strålen GD:s förlängning träffar axeln i A_1, den ena av punkterna A och A_1 den andras spegelbild i (den konvexa) ytan DED_1. De bilder, som vi här tänka oss uppkomma genom brytning eller reflexion, äro sådana som uppstå *endast i följd av strålar med elongationen* φ. Dessa ligga på ytan av koner med spetsarna i A, B, A_1, B_1 och vilkas mantlar alla gå genom den cirkel på den sfäriska ytan, som beskrives av punkten

D, då figuren får vrida sig ett varv runt om axeln AB som rotationsaxel.

Om därför i ekvationerna (2)—(6) man sätter $y=CA$, bestämma de båda x-värdena lägena av bilden B och dennas spegelbild B_1; om $y=CA_1$, bestämma x-värdena detta virtuella föremåls bild B_1 och dennas spegelbild B. Ger man omvänt åt x ett givet värde $x=CB$, så bestämma de båda y-värdena lägena av föremålet A och dettas spegelbild A_1, och om $x=CB_1$ (neg.), så bestämma y-värdena lägena av det virtuella föremålet A_1 och dettas spegelbild A. Tänker man sig ljuset gå i motsatt riktning från B eller B_1, så gälla de omvända förhållandena.

§ 4. Sedan vi sålunda klargjort betydelsen av att två värden erhållas på x eller y i ekvationerna (2)—(6), skola vi undersöka utsträckningen av det område, som belyses av strålar, vilka alla inträngа i punkten D, eller allmännare, vilka hava elongationen φ. Vi tänka då först på de strålar, som ligga i teckningens plan ADB. Minskas vinkeln i ända till noll, rycka både B och B_1 närmare medelpunkten C, där de sammanträffa, då $i=0$. De strålar, som ligga inom vinkeln ADG och inträngа genom D, belysa sålunda stycket BB_1 av axeln. Ökas infallsvinklarna i, flyttas såväl B som B_1 i riktning från medelpunkten, och då i uppnår sitt största värde 90°, då AD och GD bilda en rät linje, som tangerar cirkelbågen i D, är den belysta delen av axeln den största möjliga. De båda vinklarna b ha då sitt största värde eller gränsvinkeln g $\left(\sin g=\frac{1}{n},\ n>1\right)$. Inträngа således genom D strålar från alla håll i planet ADB, så belyses av axeln ett stycke BB_1 av sådan utsträckning och sådant läge, att vinkeln $BDB_1=2g$. Är $\varphi>g$ är detta stycke av ändlig utsträckning. Den del av planet EDB, som belyses av de genom D inträngande strålarna, är tydligen den del, som ligger inom sistnämnda vinkel $BDB_1=2g$.

Tänka vi på alla strålar, som kunna inträngа genom punkten D och icke endast på dem, som ligga i planet EDC, så utfylla dessa, då $n>1$, en kon med spetsen i D och

vars genererande vinkel är gränsvinkeln g. Ett plan genom axeln EC, vilket icke går genom D, avskär av denna kon en konisk sektion, vars inre belyses av strålarna från D. Det stycke av axeln BB_1, som belyses, är en diameter i denna koniska sektion. Är BB_1 av ändlig utsträckning ($\varphi > g$), så är den koniska sektionen en ellips (en cirkel blott om $\varphi = 90°$), i annat fall en parabel eller en hyperbel.

Taga vi nu i betraktande alla strålar med elongationen φ, som utgå från punkter på eller utanför axeln AC, så utfylla dessa efter brytningen icke hela det inre av den ljusbrytande kroppen. Från varje punkt av småcirkeln genom D med elongationen φ utgår till kroppens inre en ljuskon med öppningsvinkeln $2g$.

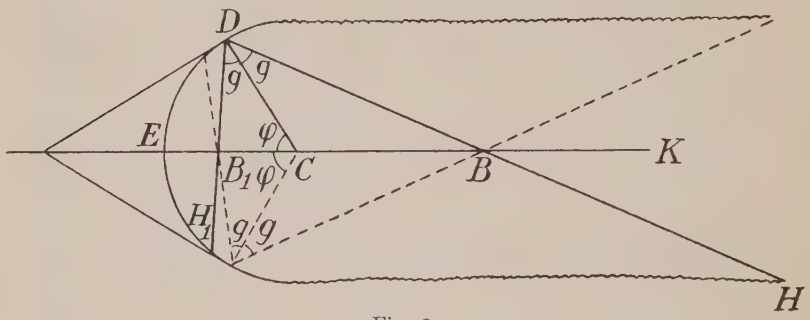


Fig. 2.

Tänker man sig ovanstående figur 2 rotera omkring BB_1 som axel, så genererar ytan H_1DH hela den rymd, till vilken strålar kunna komma. Vissa områden inom den ljusbrytande kroppen äro mörka, i figuren de delar, som begränsas av kroppens yta och mantlarna av två koner med spetsarna i B_1 och B samt axlarna B_1E och BK. Det möter ej någon svårighet att inse, hur de belysta och obelysta områdena ändra gestalt, då vinkeln φ får antaga olika värden. Punkten D flyttar sig därvid utefter cirkelbågen DE, och den genererande ytan H_1DH följer med.

Strålar av elongationen φ från eller till en punkt på axeln.

§ 5. Om ljusstrålar divergera från eller konvergera mot en punkt på den optiska axeln och alla hava elongationen φ, så ligga de i varje särskilt fall på mantelytan av en kon med spetsen i denna punkt. Detta fall är av intresse, därför att alla strålar eller deras förlängningar efter brytningen (eller reflexionen) träffas i samma punkt på axeln. Man har här alltså ett fall av s. k. punktuell avbildning.

§ 6. *Spegelbilder.* Betecknar man högra membrum av ekvationen (6) med R^2 och de båda x-värdena med x_1 och x_2, så erhålles

$$\frac{1}{x_1}+\frac{\cos\varphi}{r}=R \text{ och } \frac{1}{x_2}+\frac{\cos\varphi}{r}=-R \quad . . \quad (7)$$

således

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{2\cos\varphi}{r}=0 . \quad . . . . . \quad (8)$$

Detta är den bekanta relationen mellan bildens och föremålets avstånd till centrum av en sfärisk spegel.[1]

Därmed är lämnat ett analytiskt bevis för det förut i § 3 bevisade förhållandet.

Överflyttar man i ekvation (6) sista termen till vänstra sidan och betecknar därefter vänstra membrum med R_1^2, erhålles på samma sätt som nyss

$$\frac{n}{y_1}-\frac{n\cos\varphi}{r}=R_1 \text{ och } \frac{n}{y_2}-\frac{n\cos\varphi}{r}=-R_1 \; . \; (7a)$$

således, då $(n > 0)$

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{2\cos\varphi}{r} . \quad . . . . . \quad (8a)$$

[1] I *Molls* lärobok i fysik, optiken (5:e uppl.), exempel 42 till kap. 7, lyder formeln

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{2\cos v}{r},$$

men där räknas x positiv i riktning mot spegeln. Med de i denna uppsats använda tecknen för x_1 och x_2 ha vi $x=-x_1$, $a=x_2$ och $v=\varphi$.

Detta är samma formel som (8), emedan r bör räknas med motsatt tecken mot i ekvation (8) på grund därav, att spegeln är krökt åt motsatt håll, mot vad där förutsättes.

Brännpunkten F för den speglande ytan ligger emellertid icke mitt på radien CE, såsom fallet är, då φ antages approximativt $=0$. Gör man i ekvation (8) $x_1=\infty$, blir

$$x_2=f=-\frac{r}{2\cos\varphi},$$

där f är brännvidden. Drager man genom punkten D (fig. 3) en tangent DK, som skär axeln i K, så är sträckan

$$KC=\frac{r}{\cos\varphi}.$$

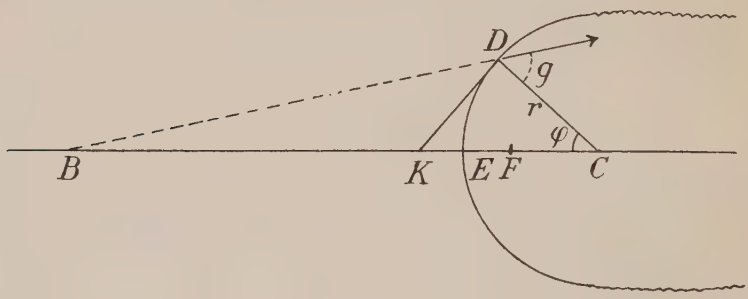


Fig. 3.

Brännpunkten F ligger alltså mitt på hypotenusan KC. Det negativa tecknet för f anger, att brännvidden bör räknas i en riktning från C motsatt den, i vilken vi räkna x positiv. Då φ minskas, närmar sig K till spegelns mittpunkt E och brännpunkten till mittpunkten av radien CE. Ökas φ, rycker K allt längre bort och därmed också F, och när φ närmar sig gränsvärdet 90° rycker brännpunkten oändligt långt bort.

§ 7. *Brännpunkterna för de brutna strålarna.* Sätter man i ekvation (6) $y=\infty$, erhåller man

$$\frac{1}{x}=-\frac{\cos\varphi}{r}\pm\frac{1}{r}\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}$$

och härav

$$x = f_2 = \frac{r\cos\varphi \mp r\sqrt{n - \sin^2\varphi}}{n^2 - 1}.$$

För $\varphi = 0$ får man de båda värdena

$$\frac{r + r\sqrt{n^2}}{n^2 - 1} = \frac{r}{n-1} \quad \text{och} \quad \frac{r - r\sqrt{n^2}}{n^2 - 1} = -\frac{r}{n+1}$$

och för $\varphi = 90°$

$$\frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad \text{och} \quad -\frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

De båda förra positiva värdena angiva avståndet från medelpunkten till de brutna strålarnas brännpunkt, den s. k. »bakre» brännpunkten. Vill man räkna brännvidden från den brytande ytans mittpunkt E (fig. 1), har man att öka dessa värden med r.

Då φ ökas från 0° till 90° minskas brännvidden med beloppet

$$\frac{r}{n-1} - \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

För $n = \frac{3}{2}$ är detta $2r - \frac{\sqrt{80}}{10}r = 2r - 0{,}8944r = 1{,}1056r$.

Vore således den ljusbrytande kroppen av glas ($n = \frac{3}{2}$) och begränsad av en halvsfär, som träffades av ett med axeln parallellt strålknippe, utfyllande en cylinder med basytan lika med halvsfärens storcirkel, så komme de brutna strålarna att träffa axeln utefter en begränsad linje, vars utsträckning är något mer än 1,1 gånger radien.

Sätter man i ekvation 6 $x = \infty$, erhåller man

$$\frac{1}{y} = \frac{\cos\varphi}{r} \mp \frac{1}{nr}\sqrt{1 - n^2\sin^2\varphi}$$

och således

$$y = f_1 = \frac{n^2 r\cos\varphi \mp nr\sqrt{1 - n^2\sin^2\varphi}}{n^2 - 1}.$$

Härav synes först och främst, att y blir komplex, om

$$\sin^2 \varphi > \frac{1}{n^2}$$

d. v. s. $\varphi >$ gränsvinkeln g.

Från punkter på den sfäriska ytan, vilkas elongation är $> g$, kunna inga strålar inträngа, så att de efter brytningen bli parallella med axeln, vilket även omedelbart är självklart. Det största värde, för vilket detta kan ske, är $\varphi = g$. För detta värde blir

$$f_1 = \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot r \cos g = \frac{nr}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

För $\varphi = 0$ fås de båda värdena

$$f_1^{(1)} = \frac{n}{n+1} \cdot r \text{ och } f_1^{(2)} = \frac{n}{n-1} r.$$

Det första värdet är $< r$ (om $n > 1$) och kan således ej avse strålar, som brutits i den sfäriska ytan. Det andra värdet

$$f_1 = \frac{n}{n-1} \cdot r$$

är avståndet från medelpunkten till centrala strålars »främre» fokus.

Antages $n = \frac{3}{2}$, blir

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} r = \frac{3}{\sqrt{5}} r = 1{,}3416r \text{ och } \frac{n}{n-1} r = 3r.$$

Vore således den ljusbrytande kroppen en cylinder av glas ($n = \frac{3}{2}$), på vars ena bas är ställd en halvsfär med medelpunkten på cylinderns axel i glaset, och vore denna cylinder fylld av ljusstrålar parallella med axeln, vilka träffade den sfäriska ytan, så skulle alla de, vilkas elongation var $> g$, totalreflekteras, och de övriga utgående brytas tillsammans till punkter på en begränsad linje på axeln, vars utsträckning är $3r - \frac{3r}{\sqrt{5}} = 1{,}6584$ gånger radien.

§ 8. *En annan exakt formel.* Ekvationen (6) hade, som vi sett, den olägenheten, att man erhöll ett främmande värde utom det, som bestämde bildens eller föremålets läge på axeln vid strålarnas brytning. Detta kan undvikas, om man går tillväga på följande sätt.

Projiciera på normalen CN (fig. 1), dels CA, dels den brutna linjen CDA. Då fås

$$y \cos \varphi = r + p \cos i .$$

Projicieras därefter på DC, dels DB, dels den brutna linjen DCB, så erhålles

$$q \cos b = r + x \cos \varphi .$$

Av dessa båda ekvationer framgår

$$\frac{q}{p} = \frac{r + x \cos \varphi}{y \cos \varphi - r} \cdot \frac{\cos i}{\cos b} = n \frac{x}{y} = \frac{\sin i}{\sin b} \cdot \frac{x}{y}$$

enligt ekvation (1).

Alltså blir, om vi införa beteckningen

$$N = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} b} , \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\frac{r + x \cos \varphi}{y \cos \varphi - r} = N \frac{x}{y} ,$$

således

$$ry + xy \cos \varphi = Nxy \cos \varphi - Nrx$$

och efter division med xyr och överflyttning

$$\frac{1}{x} + \frac{N}{y} = \frac{N - 1}{r} \cos \varphi . \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

Denna ekvation är av en ganska enkel form, och den ger blott ett värde på y för ett givet x-värde och omvänt, men den lider av den olägenheten, att N icke är konstant för ett givet värde på φ, utan ändrar sig, då x eller y ändra sig. I den mån punkten A (fig. 1) avlägsnar sig från K (fig. 3) och y således ökas, minskas infallsvinkeln i för strålen AD från 90°, och för $y = \infty$ antager den värdet φ. För mindre

infallsvinkel är föremålet virtuellt, och då y ändrar sig från $-\infty$ till 0 minskas i från φ till 0; föremålet är då i medelpunkten C. Då det virtuella föremålet flyttar sig från C till K, växer y från 0 till $\frac{r}{\cos\varphi}$. Infallsvinkeln i är då belägen på andra sidan om normalen CN, på normalens »baksida».

Det kan vara av intresse att se, hur N ändrar sig med infallsvinkeln. N har samma värde för ett givet i, vare sig infallsvinkeln ligger på ena eller andra sidan om normalen, emedan alltid $\sin i = n \sin b$. Vinkeln i bör räknas negativ, då den ligger på normalens baksida (såsom $\angle GDN$ i fig. 1); då blir också b negativ, enär denna vinkel nu ligger på normalens framsida. Värdet av N är i följande tabell beräknat för $n = 1{,}5$.

$i =$ 5°	10°	20°	30°	40°
$b =$ 3°19′50″;	6°38′50″;	13°10′50″;	19°28′20″;	25°22′30″;
$N =$ 1,503	1,513	1,556	1,633	1,769
$i =$ 50°	60°	70°	80°	89°
$b =$ 30°42′50″;	35°15′40″;	38°47′20″;	41°2′30″;	41°48′9″;
$N =$ 2,006	2,451	3,418	6,515	64,07

$i = 90°$
$b = 41°48′37″.$
$N = \infty$

För mycket små värden på i är $\operatorname{tg} i = \sin i$, således ock $\operatorname{tg} b = \sin b$; då är $N = n$ och den sista ekvationen kan skrivas

$$\frac{1}{x} + \frac{n}{y} = \frac{n-1}{r} \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Då i växt till 10°, är skillnaden mellan N och n ännu ganska liten, avvikelsen är blott 1,3 : 150; för stora värden på i är den ansenlig.

Är y givet, kan man på följande sätt beräkna infalls-

vinkeln i för en stråle, som träffar den sfäriska ytan i en punkt D med elongationen φ (fig. 1). Tillämpa vi tangentteoremet på triangeln ACD, fås, då $y > \frac{r}{\cos\varphi}$, $(\angle A = i - \varphi)$

$$\frac{y+r}{y-r} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(180^\circ - i + i - \varphi)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(180^\circ - i - (i-\varphi))} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(90^\circ - i + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\cot\frac{\varphi}{2}}{\cot\left(i - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

således

$$\operatorname{tg}\left(i - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{y+r}{y-r}.^{1} \quad \ldots \quad (12)$$

Genom de tre ekvationerna (9), (10) och (12) i förening med $\sin i = n \sin b$ kan man entydigt beräkna läget av den bild, som en given lysande punkt på axeln alstrar medelst strålar av given elongation φ.

§ 9. *Approximativ formel.* Är φ en mycket liten vinkel, har man approximativt $\cos\varphi = 1$, och φ försvinner ur formlerna. Formeln (11) övergår då till

$$\frac{1}{x} + \frac{n}{y} = \frac{n-1}{r} \quad \ldots \quad (13$$

och (10) till

$$\frac{1}{x} + \frac{N}{y} = \frac{N-1}{r}. \quad \ldots \quad (14)$$

Formeln (13) användes ofta utan vidare för att bestämma bildens läge, då elongationerna φ för alla punkter på den sfäriska ytan äro små. Men man bör ihågkomma, att den även förutsätter, att infallsvinklarna äro små. Då föremålet ligger mycket nära den brytande ytan, är detta långt ifrån att

[1] Denna formel gäller icke endast då $y > \frac{r}{\cos\varphi}$, utan är generell, om man blott räknar i negativ på normalens baksida och y negativ till höger om C (fig. 1), såsom en detaljerad undersökning av de möjliga fem olika fallen visar.

vara fallet, och man bör då använda formeln (10). N har då värden, som betydligt skilja sig från n. Huru stora avvikelserna kunna vara framgår av följande sifferexempel.

Exempel. Låt i fig. 1 φ vara 2°, $i=89°$. Formeln (12) ger då $y=1{,}001220r$. CK (fig. 3) är $1{,}00061r$.

Ekvation (13) ger för $n=\frac{3}{2}$ $x=-1{,}00183r$.

För $i=89°$ är enligt tabellen $N=64{,}07$, och sålunda ger ekvation (14) $x=-1{,}08466r$.[1]

Den exakta formeln (10) ger $x=-1{,}04132r$.

För samma y-värde $1{,}001220r$ och $i=90°$ har man $\varphi_1=2°49'43''$ och ur triangeln CBD (fig. 3)

$$\frac{CB}{r}=\frac{-x}{r}=\sin g : \sin(g-\varphi_1).$$

Härav fås $x=-1{,}05976r$.

En bikonvex lins av glas med lika radier och styrkan *en* dioptri har $\left(\frac{1}{f}=(n-1)\frac{2}{r}\right)$ vardera radien lika med 1 meter. Låt i föregående exempel radien hava denna storlek 1 000 mm. Exemplet visar, att en lysande punkt på 1,2 mm:s avstånd från ytan ger upphov till virtuella bilder, alstrade av koniska mantelstrålar, av vilka den närmaste bilden ligger 1,8 mm från ytan och den längst bort belägna 59,8 mm från ytan. Överallt på sträckan mellan dessa ändpunkter ligga bilder, motsvarande de olika φ-värdena eller i-värdena.

Ofta identifierar man centrala strålar med strålar, vilkas infallsvinkel i är så liten, att $\operatorname{tg} i=\sin i$. Då föremålet ligger mycket nära ytan, måste man emellertid, såsom vi sett, skilja mellan dessa två slag.

§ 10. *Sambandet mellan de båda exakta formlerna.* I $\triangle CBD$ (fig. 1) är $\angle B=\varphi-b$. Enligt sinusteoremet fås då

$$\frac{\sin b}{x}=\frac{\sin(\varphi-b)}{r}=\frac{\sin\varphi\cos b-\cos\varphi\cdot\sin b}{r},$$

[1] Approximationen $\cos 2°=1$ inverkar här synnerligen menligt.

således $$\frac{1}{x}=\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\cos b}{\sin b}-\frac{\cos\varphi}{r}$$

eller $$\frac{1}{x}+\frac{\cos\varphi}{r}=\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\cos b}{\sin b}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

På samma sätt fås ur $\triangle CAD$, där $\angle A=i-\varphi$,

$$\frac{\sin i}{y}=\frac{\sin(i-\varphi)}{r},$$

alltså $$\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{1}{y}=\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\cos i}{\sin i}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Multipliceras denna likhet med $n=\frac{\sin i}{\sin b}$ fås

$$n\left(\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{1}{y}\right)=\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\cos i}{\sin b}. \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Kvadrerar man ekvationerna (15) och (17) och subtraherar den senare från den förra, får man ekvation (6). Divideras (15) med (16) led för led, så erhålles ekvation (10). De enkla räkningarna förbigås här.

§ 11. *De aplanatiska punkterna.* Låter man x och y få sådana värden, att

$$\frac{1}{x}+\frac{n^2}{y}=0$$

eller $$y=-n^2x,$$

så försvinner ur ekvation (5) den av φ beroende termen. Den sista ekvationen satisfieras först och främst av $x=y=0$, och dessa värden utsäga, att om strålar konvergera mot medelpunkten för den sfäriska ytan, så uppstår bilden där oberoende av strålarnas elongation. Men ekvation (5) satisfieras också av sådana x- och y-värden, som satisfiera de båda systemen

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{n^2}{y}&=0\\ \frac{1}{x}+\frac{n}{y}&=\frac{n-1}{r}\end{aligned}\right\} \text{ och } \left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{n^2}{y}&=0\\ \frac{1}{x}-\frac{n}{y}&=-\frac{n+1}{r}\end{aligned}\right\},$$

nämligen $\begin{cases} x = \frac{r}{n}, \\ y = -nr, \end{cases}$ och $\begin{cases} x = -\frac{r}{n}, \\ y = nr. \end{cases}$

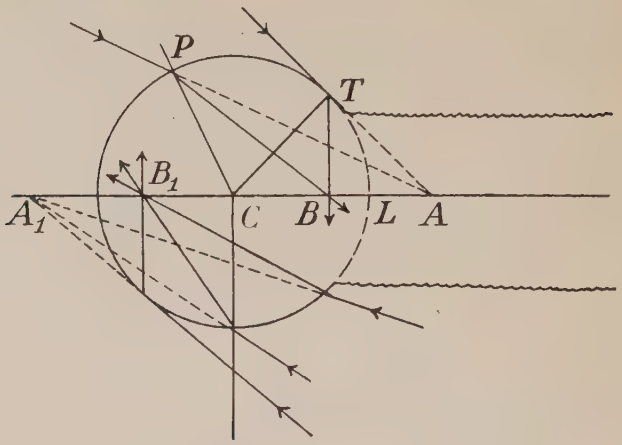


Fig. 4.

I fig. 4 utmärkes det första värdeparet (för $n = \frac{3}{2}$) av punkterna B och A, det andra av B_1 och A_1. Om således strålar konvergera mot punkten A, så gå alla de av den sfäriska ytan brutna strålarna genom B oberoende av elongationen. Omvänt ger ett lysande föremål i B upphov till en virtuell bild i A. Det förefinnes en fullständig punktuell avbildning. A och B kallas därför de båda *aplanatiska punkterna.*

I själva verket finnes det ännu ett aplanatiskt punktpar A_1B_1; men då de strålar, som konvergera mot A_1, äro riktade åt motsatt håll mot dem, som konvergera mot A, så räknar man vanligen blott ett aplanatiskt punktpar för varje strålriktning.

Bland de strålknippen, som hava samma elongation, är det ett, som bildar manteln på en kon med spetsan i A och som tangerar sfären. Detta knippe har den största möjliga elongationen; det tangerar sfären utefter en cirkel, och man kan bevisa, att B är denna cirkels medelpunkt.

Ty låt TA vara en tangerande stråle och C sfärens medelpunkt. Infallsvinkeln i T är 90°, och således är brytningsvinkeln CTB lika med gränsvinkeln g. Vidare är

$$\frac{CT}{CA} = \sin \angle A = \frac{r}{nr} = \frac{1}{n} = \sin g .$$

Således är $\angle CTB = \angle A$ och alltså TB höjden mot hypotenusan i den rätvinkliga triangeln CTA. Om därför fig. 4 får rotera ett varv omkring AA_1 som rotationsaxel, beskriver BT ett plan och T en cirkel med B till medelpunkt. Läget av B_1 är analogt.

I triangeln CAP är $CA = nr$ och vinkeln $P = i$; således är

$$\frac{nr}{r} = \frac{\sin i}{\sin A} = n = \frac{\sin i}{\sin b} .$$

Således är $\angle PAC = b$.

I $\triangle CBP$ är $CB = \frac{r}{n}$, $\angle P = b$, således är

$$r : \frac{r}{n} = \frac{\sin B}{\sin b} = n = \frac{\sin i}{\sin b} ,$$

alltså $\angle CBP = i$.

Dessa relationer gälla oberoende av läget för P, och båda trianglarna lämna relationen

$$\varphi = i + b . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Då vidare $LA = nr - r$, $LB = r - \frac{r}{n}$, är

$$\frac{LA}{LB} = n = \frac{\sin i}{\sin b} = \frac{AP}{BP} \text{ (enl. sinusteoremet),}$$

och således är cirkeln PTL den harmoniska cirkeln till punkterna A och B.

De aplanatiska punkterna kunna i vissa fall med fördel användas vid konstruktion av bilden av en lysande punkt utanför axeln. En stråle, som från punkten skulle gå till den första aplanatiska punkten A, brytes till den

andra B, oberoende av elongationen. En annan stråle genom medelpunkten går obruten fram. Där de båda strålarna efter brytningen träffas, uppstår bilden under förutsättning, att de båda nämnda strålarna före brytningen tillhöra ett så smalt strålknippe, att alla strålarna efter brytningen träffas i samma punkt. Brännpunkterna lämpa sig mindre för konstruktionen, enär deras lägen på axeln äro beroende av elongationen.

§ 12. Formeln (13) är ett exempel på, huru elongationen kan försvinna ur formeln; i detta fall var φ approximativt noll. Det är icke utan intresse att påpeka ett annat fall, då detsamma inträffar. Antaga vi φ approximativt vara 90°, så övergår ekvation (6) till

$$\frac{1}{x^2} = \frac{n^2}{y^2} + \frac{n^2 - 1}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Bilden alstras här av strålar, som träffa en smal zon omkring den mot axeln vinkelräta storcirkeln. Endast virtuella föremål eller mycket avlägsna reella komma i fråga; avbildningen är punktuell i samma grad som för $\varphi = 0$.

§ 13. I det föregående hava vi låtit den sfäriska ytan vara konvex. Man finner emellertid, att formlerna gälla även om ytan är konkav, om man blott då räknar radien r negativ, såsom det framgår av nya figurer.

Enhetlig trådkonstruktion av andragradskurvorna.

Av CARL BENEDICKS.

1. Inledning.

Alhasan, son till *Musa Ibn Schakir*, lär på 800-talet e. Kr. givit den första beskrivningen på ellipsens uppritande med tillhjälp av en i brännpunkterna fästad tråd.[1]

För uppritande av hyperbeln genom kontinuerlig rörelse i planet har man den kända metoden — av obekant ålder och ursprung — som ligger i att använda en tråd *och en linjal*.[2] Därvid är linjalen »rörlig kring en i ena ändpunkten av dess ena kantlinje belägen punkt, vilken punkt placeras i ena brännpunkten F'. I andra ändpunkten D och i focus F fästas vidare de båda ändarna av en tråd DPF... Föres nu spetsen P av ett ritstift så, att den alltid håller tråden spänd och tillika håller den från D till stiftet räckande delen av tråden tryckt intill linjalen ...»[3] beskriver punkten P ena grenen av en hyperbel.

Det har länge förefallit mig egendomligt, att, trots den ingående analogien mellan ellips och hyperbel, den senares konstruktion sålunda skall vara av ej oväsentligt mera komplicerad natur än den förras.

Som för ett visst ändamål — konstruktionen av i en metall under vissa betingelser uppträdande korngränser —

[1] *I. Cantor*, Gesch. d. Math. 1, p. 690 (citerat efter *F. Dingeldey*, Enc. d. math. Wiss. Bd III: 2, H. 1, Leipzig 1903, S. 8).

[2] Se t. ex. *M. Falk*, Lärobok i plan analytisk geometri, Stockholm (Norrköping) 1886, s. 199; *L. Lindelöf*, Lärobok i analytisk geometri, 4 uppl., Stockholm 1889, s. 80.

[3] *M. Falk*, a. st., s. 199.

behövdes ett enkelt sätt att upprita hyperblar, kom författaren att något syssla med frågan. Det framgick därvid, att den anförda hyperbelkonstruktionen i själva verket är onödigt komplicerad: den måste sägas lida av det, åtminstone i pedagogiskt hänseende, svåra felet att uppsätta ett visst för uppgiften alldeles överflödigt villkor.

2. Hyperbelns trådkonstruktion.

Saken ställer sig nämligen vid närmare undersökning så, att konstruktion av hyperbeln genom kontinuerlig rörelse i planet kan realiseras på följande enklare sätt.

I de bägge valda brännpunkterna F, F' (fig. 1), fästas ändarna av en tråd vid där placerade stift. Ett ritstift fasthålles först i en punkt P, genom vilken en hyperbelgren önskas dragen. De bägge trådändarna läggas å *ömse sidor* om ritstiftet P, och få sedan följas åt längs samma linje PQ. Sedan bägge ändarna sträckts, fasthålles tråden vid Q, så att ändarna icke glida i förhållande till varandra. Om nu P förflyttas, under det trådsträckan PQ ständigt hålles sträckt — i en riktning *vilken som helst* innanför förlängningarna PR, PR' av de bägge rörliga radierna FP, $F'P$ — beskriver P en hyperbel.

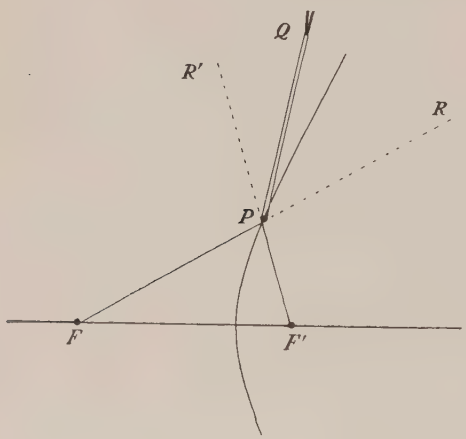


Fig. 1.

Detta framgår ju direkt av hyperbelns definition, som locus för en punkt, vars avstånd från tvenne fasta punkter äga en konstant differens, eftersom, så snart trådarna äro spända, radierna FP och $F'P$ ständigt måste differera med

samma konstanta längd som trådlängderna FPQ och $F'PQ$ själva.

Den gamla konstruktionen (*linjal-trådkonstruktionen*) skiljer sig ju från denna rena trådkonstruktion endast i det hänseendet, att man där på grund av linjalens förekomst påtvingar konstruktionen det fullständigt överflödiga villkoret, att riktningen PQ skall sammanfalla med vare sig PR eller PR'.

I praktiskt hänseende medför detta godtyckliga villkor knappast någon fördel, i det att den felkälla som man möter vid realiserandet framför allt ligger i den använda trådens elasticitet. Om, vid linjal-trådkonstruktionen, den använda trådspänningen (som antas likformig i hela tråden) t. ex. ökas, beskriver ritstiftet en liten sträcka, som i allmänhet bildar en vinkel av grovt taget inemot 90° mot den önskade hyperbelns riktning i punkten i fråga — eftersom det ju är trådsträckorna $F'P$ och RP (eller FP och $R'P$) som därvid undergå en elastisk förlängning, under det sträckan FR (eller $F'R'$) är att betrakta som oföränderlig; vid användande av enbart tråd kommer däremot vid ökad trådspänning ritstiftet att förflyttas en liten sträcka som långt bättre närmar sig samma riktning som hyperbeln, eftersom det ju nu är trådsträckorna FP och $F'P$ som undergå en elastisk förlängning.

I princip bör därför det senare sättet kunna ge regelbundnare kurvor. Praktiskt taget märker man dock vid jämförande försök knappast någon skillnad hos de kurvor, som erhållas med de bägge varianterna. Däremot måste man ju säga, att villkoret att disponera en linjal, som är rörlig kring en punkt på dess ena sida, ju innebär en i praktiskt hänseende avsevärd inskränkning; det bör kunna vara bra att veta att detsamma är fullständigt överflödigt!

En annan fördel är, att trådmetoden medger att utan vidare rita en hyperbelgren å bägge sidor om axeln, under det att linjal-trådmetoden, på grund av de oundgängliga brännpunktsstiftena, bekvämt medger endast ritandet av halva grenen.

Som prov på de kurvor, som erhållas med den här beskrivna trådmetoden, hänvisas till fig. 2, som utan retusch återger några så erhållna konfokala hyperblar. För jämförelses skull är med samma tråd och (tusch-)ritstift upprita en ellips med samma brännpunkter F, F'.[1]

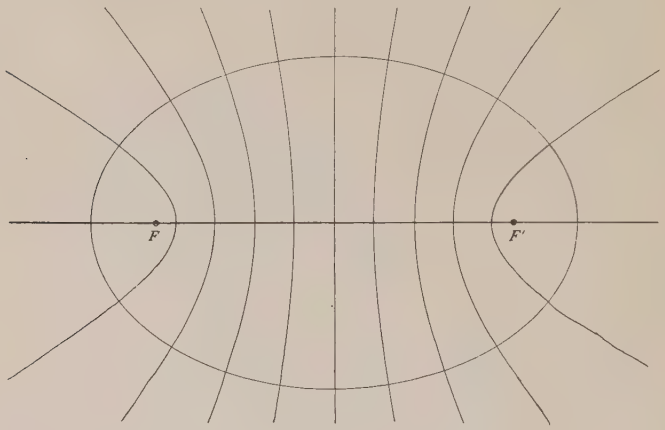


Fig. 2.

Framhållas kan, att de svagt krökta hyperblarna — såsom t. ex. den likaledes med trådmetoden dragna, strängt rätliniga transversallinjen — utfalla regelbundnare än ellipsen; denna är däremot regelbundnare än de starkare krökta hyperblarna.

3. Praktiska detaljer.

Den använda tråden tages tämligen lång, och får vid Q (fig. 1) lämpligen löpa över en omböjd metalltråd; sedan tråden spänts vid den första avpassningen, fasthålles den (gärna genom ombindning!) vid denna metalltråd, som samtidigt tjänstgör som handtag.

Lämpligaste trådmaterial är tunnaste silketråd; för att öka hållfastheten är det lämpligare att t. ex. draga tråden

[1] Å originalet motsvarar sträckan FF' ungefär 25 cm. — Vid reproduktionen ha några smärre oregelbundenheter å ellipsen utjämnats.

trenne gånger mellan brännpunktsstiften, än att använda tjockare tråd. Som blyertsritstift lämpar sig utmärkt ett dylikt av »Eversharp»-typen (som har 1,2 mm stift). För tuschritning kom till användande ett 0,8 mm tjockt, genomborrat mässingsrör, fästat vid en liten tuschbehållare; en något över nedre ändan anbragt liten mässingsplatta hindrar tråden från att glida ned och beröra papperet; inuti röret lämpligen en fin nål, genom vilken utflödet av tusch kan regleras. Detta ritstift är lämpligen fästat i vertikalt läge vid en lätt glidande hållare (glasrör!) som gärna hålles belastad till lagom friktion.

Det har förefallit bekvämast, att först placera detta ritstift i ytterläge å andra sidan om FF' (fig. 1) med trådarna spända, och att sedan blott och bart draga i Q, så att PQ kommer ungefär i den väntade hyperbelns riktning; sista biten måste P':s rörelse underlättas t. ex. genom att man skjuter på med en penna eller dylikt, som hålles vinkelrätt mot rörelseriktningen.

Vid ritning å svarta tavlan bör den runda kritan omges av ett omklistrat papper för att snöret ej skall skära in.

Naturligtvis kan man något öka precisionen hos de ritade hyperblarna genom att låta tråden glida i springan mellan tvenne närbelägna, parallella nålar, som tvingar trådändarna samman vid P, och anbringa ritstiftet omedelbart därintill.

4. Enhetlig framställning av ellips, hyperbel, parabel.

I det föregående har antagits, att de bägge brännpunkterna F, F' ligga fasta inom rittavlans område. Låt oss nu antaga att brännpunkten F' får rycka långt utanför tavlans område åt höger (se fig. 3), d. v. s. förläggas till »oändligheten» i sagda riktning. Trådkonstruktionen låter oförändrat använda sig: ena ändan av en tillräckligt lång tråd fästes i den på tavlan belägna brännpunkten F (fig. 3),

den andra ändan i den långt utanför (men i tavlans plan) liggande brännpunkten F'.[1]

Tråden låter då (efter lämplig avknytning) dels använda sig till alstrandet av en elliptisk kurva *I* (rörlig punkt *N*), dels, i enlighet med det föregående, till alstrandet av en hyperbolisk kurva *II* (rörlig punkt *P*); dennas axelavskärning är tagen lika med den förras. För bägge kurvorna kan högra radius vector (NF', resp. PF') betraktas som ständigt parallell med axeln FF', i den mån F' är tillräckligt avlägsen.

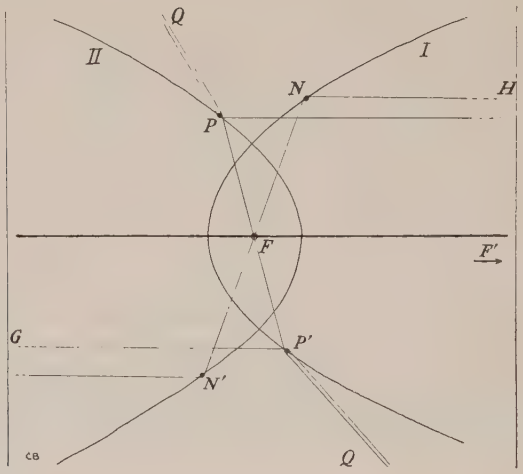


Fig. 3.

Förlägges F' i stället långt utanför tavlan på motsatta, vänstra sidan, kommer ellipskonstruktionen att kunna giva en med II sammanfallande kurva (rörlig punkt N'), hyperbelkonstruktionen däremot en med I sammanfallande kurva (rörlig punkt P').

I och *II* äro givetvis att uppfatta som på två olika sätt uppritade, identiska *parablar*.

Konstruktionen torde få anses på fullt klart sätt illu-

[1] Därvid är lämpligt att den utanför tavlan belägna delen av snöret, som icke behöver undergå någon krökning, t. ex. ersättes med en tunn mässingstråd (»lamettaband» e. d.), som är mindre elastisk än snöret.

strera det — kanske i läroböckerna något förbisedda — förhållandet, att *parabeln är att betrakta som den urartning av ellipsen eller av hyperbeln, som uppstår, då den ena brännpunkten rycker (oändligt) långt bort.*

Naturligtvis kan det ur konstruktionssynpunkt vara praktiskt att ersätta den i den avlägsna brännpunkten fästa rörliga radien med en tråd som är fästad vid och sträckt längs en vinkellinjal — i enlighet med den för parabeln övliga konstruktionen med tråd och vinkelhake. Ur systematisk synpunkt är den rena trådkonstruktionen även här avgjort att föredraga.

Särskilt måste det betecknas som alldeles för speciellt att definiera parabeln som orten för en punkt, vars avstånd till en punkt och till en rät linje ständigt äro lika stora.[1] För inskränkt är fortfarande att definiera parabeln som orten för en punkt, vars avstånd till en punkt och till en rät linje ständigt ha samma differens; detta alldenstund det är precis lika riktigt att uppfatta parabeln som orten för en punkt, vars avstånd till en punkt och till en rät linje *ständigt ha samma summa* (i detta fall förutsättes ju linjen helst tillräckligt långt bort belägen för att den uppritade parabeldelen ej skall behöva skära den, då eljest avståndets tecken måste iakttagas!).[2]

Genom det anförda uppfattningssättet torde sambandet mellan andragradskurvorna framgå på ett synnerligen naturligt sätt, genom deras primära egenskaper i planet.

[1] Se t. ex. *M. Falk*, anf. st., s. 242; *L. Lindelöf*, anf. st., s. 99.

[2] Detta illustreras ju av den i fig. 3 anförda konstruktionen och framgår ju även omedelbart: betecknas avståndet (radien) FP' med r, avståndet GP', från en till vänster om F belägen, fast vertikal rät linje G fram till P', med s, karakteriseras ju parabeln I av hyperbelformeln

$$s - r = \text{konst}_1 .$$

Betecknas å andra sidan avståndet HN, från en till höger om F dragen vertikal rät linje H fram till N, med t (och radien FN fortfarande med r) gäller ju för I likaväl ellipsformeln

$$t + r = \text{konst}_2 .$$

5. Sammanfattning.

Den gängse konstruktionen av hyperbeln med tillhjälp av en tråd och en kring en punkt å ena sidan vridbar linjal är onödigt komplicerad; enklare och naturligare är den beskrivna konstruktionen som, liksom för ellipsen, blott betjänar sig av en tråd.

Den ger sambandet mellan andragradskurvorna på enklaste sätt.

Stockholm, Metallografiska institutet, mars 1924.

Två approximationsmetoder till ekvationen $x^n = a + bx$.

Av HENRIK PETRINI.

En omedelbar rent formell lösning av ekvationen

(1) . . . . . $x^n = a + bx$

fås, om man sätter

$$x = \sqrt[n]{a + bx}$$

och i högra ledet insätter det funna uttrycket på x, varpå man förfar på samma sätt oupphörligt. Man finner då

(2) . . $x = \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + \ldots}}}$ in inf.

En annan lösning erhålles på följande sätt. Om ekvationen är av andra graden, så har man den kända kedjebråksutvecklingen

(3) . . . $\begin{cases} x = b + \dfrac{a}{x}, \\ \therefore\ x = b + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \ldots}} \text{ in inf.} \end{cases}$

Denna metod låter nu omedelbart generalisera sig på fallet (1). Man har blott att i ekv. (1) dividera med x och sätta

(4) . . . $\begin{cases} x^{n-1} = b + \dfrac{a}{x}, \\ \therefore\ x = \sqrt[n-1]{b + \sqrt[n-1]{b + \ldots}}} \text{ in inf.} \end{cases}$

Ex. Ekvationen

(5) . . . . . $x^5 = 12 + 10x$

satisfieras av $x = 2$.

Användes lösningen (2), får man sätta

(6) $x_1 = \sqrt[5]{12}$, $x_2 = \sqrt[5]{12 + 10x_1}$, $x_3 = \sqrt[5]{12 + 10x_2}$, . . .

$$\ldots\ x_{\nu+1} = \sqrt[5]{12 + 10x_\nu},$$

och man finner utan svårighet

$$x_1 = 1{,}644, \quad x_2 = 1{,}953, \quad x_2 = 1{,}994, \quad x_4 = 2{,}000.$$

Man får således en ny riktig siffra för varje steg, vadan approximationsmetoden kan anses vara synnerligen god.

Användes formeln (4), fås

$$x_1 = \sqrt[4]{10}, \quad x_2 = \sqrt[4]{10 + \frac{12}{x_1}}, \quad x_3 = \sqrt[4]{10 + \frac{12}{x_2}} \text{ etc.}$$

Uträkningen av närmevärdena förenklas genom att ej medtaga flera decimaler än som behövs. Man finner sålunda

$$x_1 = 1{,}8, \quad x_2 = 2{,}02, \quad x_3 = 2{,}000.$$

I detta fall får man, som man kunde vänta sig av analogin med (3), ömsevis för stora och för små värden, vadan man får en direkt uppgift på approximationsgraden.

De båda approximationsmetoderna (2) och (4) ha sålunda visat sig vara synnerligen användbara åtminstone i ett speciellt fall. Det återstår nu att närmare bestämma området för deras användbarhet. I det följande skola vi endast hålla oss till det fall, då koefficienterna a och b äro reella och positiva, och då den sökta roten till ekv. 1 är reell och positiv. De i formlerna uppträdande rötterna kunna då antagas vara reella och positiva.

Uppgiften blir alltså att bestämma en positiv rot till ekv.

(7) . . . . . $\begin{cases} x^n = a + bx, & n > 1 \\ a > 0, & b > 0. \end{cases}$

Första approximationsmetoden.

Lösningen (2) framgår ur följande av ekv. (7) betingade identitet

$$(8) \quad x = \sqrt[n]{a+bx} = \sqrt[n]{a+b\sqrt[n]{a+bx}} =$$
$$= \sqrt[n]{a+b\sqrt[n]{a+b\sqrt[n]{a+bx}}} = \text{etc.},$$

och approximationsförfarandet blir då, om man för varje gång sätter $x=0$ under rotmärket,

$$(9) \quad x_1 = \sqrt[n]{a}, \; x_2 = \sqrt[n]{a+bx_1}, \; x_3 = \sqrt[n]{a+bx_2}, \; \ldots$$
$$\ldots \; x_{\nu+1} = \sqrt[n]{a+bx_\nu}.$$

Av (9) inses omedelbart, att

$$(10) \quad x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_\nu < x_{\nu+1}.$$

Vidare finner man, att x_ν ej kan växa över alla gränser, när ν går mot oändligheten. Ty låt t vara ett tal, som är >1 och $>a$ och $>b$. Då är

$$(11) \quad x_\nu = \sqrt[n]{a+b\sqrt[n]{a+\ldots+b\sqrt[n]{a}}} <$$
$$< \sqrt[n]{t+t\sqrt[n]{t+\ldots+t\sqrt[n]{t}}} < \sqrt[n]{2t\sqrt[n]{2t\sqrt[n]{\ldots\sqrt[n]{2t}}}}.$$

Härav följer:

$$\log x_\nu < \frac{1}{n}\log 2t + \frac{1}{n^2}\log 2t + \frac{1}{n^3}\log 2t + \ldots =$$
$$= \log 2t \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \log 2t \cdot \frac{1}{n-1},$$

således $$x_\nu < (2t)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Härav och av (10) följer, att x_ν har ett ändligt och bestämt gränsvärde.

Sätt

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad u = \lim_{\nu=\infty} x_\nu .$$

Det återstår nu att bevisa, att talet u satisfierar ekv. (7). Av (12) fås

$$(13) \quad \ldots \quad \begin{cases} x_\nu = u - \varepsilon_\nu , & \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0 , \\ x_{\nu+1} = u - \varepsilon_{\nu+1} , & \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_{\nu+1} = 0 . \end{cases}$$

Enligt (9) är

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad x_{\nu+1}^n = a + b x_\nu ,$$

varav fås enligt (13) vid övergång till limes

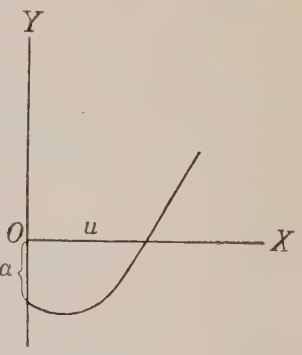
$$(15) \quad \ldots\ldots \quad u^n = a + bu .$$

u är således en rot till ekv. (7), d. v. s.

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad x = u = \lim_{\nu=\infty} x_\nu .$$

Vilken av de n rötterna till ekv. (7) får man på detta sätt? Det är tydligt, att det måste vara en reell positiv rot, och det är lätt att uppvisa, att ekv. (7) alltid har en och endast en reell positiv rot. Ty sätt

$$(17) \quad \begin{cases} y = x^n - bx - a , \\ \therefore \; y' = n x^{n-1} - b . \end{cases}$$



För $x=0$ är $y=-a<0$ och för $x=\infty$ är $y=\infty>0$, $\therefore$ finns det alltid en positiv rot till ekv. $y=0$, d. v. s. att ekv. (7) alltid har en positiv rot. Vidare är $y'<0$ för $x=0$ och blir $=0$ för ett enda positivt x-värde, således finns det endast ett enda positivt x-värde, för vilket y blir $=0$ (fig.), d. v. s. att ekv. (7) endast har en enda positiv rot.

Andra approximationsmetoden.

Lösningen (4) framgår ur identiteterna

$$(18) \qquad x = \sqrt[n-1]{b + \frac{a}{x}} = \sqrt[n-1]{b + \frac{a}{\sqrt[n-1]{b + \frac{a}{x}}}} = \text{etc.}$$

Genom att i högra ledet av varje identitet sätta $x = \infty$ fås de successiva approximationerna

$$(19) \quad x_1 = \sqrt[n-1]{b}\,, \quad x_2 = \sqrt[n-1]{b + \frac{a}{x_1}}\,, \quad x_3 = \sqrt[n-1]{b + \frac{a}{x_2}}\,, \quad \ldots$$

$$x_{\nu+1} = \sqrt[n-1]{b + \frac{a}{x_\nu}}\,.$$

Av (19) framgår, att $x_2 > x_1$, $\because x_3 < x_2$ etc., och generellt

$$(20) \quad \ldots \quad \begin{cases} x_1 < x_3 < x_5 \ \ldots \ < x_{2\nu-1} < x_{2\nu+1} \\ x_2 > x_4 > x_6 \ \ldots \ > x_{2\nu-2} > x_{2\nu} \\ \qquad\qquad x_{2\nu} > x_{2\nu+1}\,. \end{cases}$$

Nu är (20) $x_{2\mu+1} < x_{2\nu+1} < x_{2\nu}$ för alla $\mu < \nu$, och

$x_{2\lambda} > x_{2\nu}$ » » $\lambda < \nu$,

$$(21) \quad \ldots \quad \because x_{2\lambda} > x_{2\mu+1}$$

för alla λ och μ, som äro $< \nu$. Men då man alltid kan taga ν hur stort som helst, så gäller (21) för alla λ och μ, d. v. s. att alla närmevärden med jämnt ordningsnummer äro större än alla närmevärden med udda ordningsnummer. Härav följer, att $x_{2\lambda}$ har en undre gräns, som är $>$ varje $x_{2\mu+1}$, och att $x_{2\mu+1}$ har en bestämd övre gräns, som är $<$ varje $x_{2\lambda}$.

Sätt

$$(22) \quad \ldots \quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu} = u \\ \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu+1} = v\,, \\ \because u \geqq v\,, \end{cases}$$

$$\because\ x_{2\nu} = u + \delta_\nu\,,\ \lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0$$

$$x_{2\nu+1} = v - \varepsilon_\nu\,,\ \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0\,.$$

Av (19) fås då

$$(u+\delta_\nu)^{n-1} = b + \frac{a}{v - \varepsilon_{\nu-1}}$$

$$(v-\varepsilon_\nu)^{n-1} = b + \frac{a}{u+\delta_\nu}\,,$$

alltså i limes

$$(23)\quad \begin{cases} u^{n-1} = b + \dfrac{a}{v} \\ v^{n-1} = b + \dfrac{a}{u}\,, \end{cases}$$

$$(24)\quad \because\ u^{n-1} = b + \frac{a}{\sqrt[n-1]{b + \dfrac{a}{u}}}\ (2),$$

där »(2)» utmärker, att man har en likadan ekvation för v.

Sätt

$$(25)\quad \begin{cases} y = u^{n-1} - b - \dfrac{a}{\sqrt[n-1]{b + \dfrac{a}{u}}}\,, \\ \because\ y' = (n-1)\,u^{n-2} - \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{u^2} \cdot \dfrac{a^2}{\left(b + \dfrac{a}{u}\right)^{\frac{n}{n-1}}}\,. \end{cases}$$

För $u=0$ är $y<0$ och $y' \leqq 0$ (ty för $n=2$ är $y'=0$ och för $n>2$ är $y'=-\infty$, när u är $=0$).

Sättes

$$y' = 0\,,$$

fås

$$(26)\quad \ldots\quad (n-1)^2 \cdot u^{\frac{n(n-2)}{n-1}} (a+bu)^{n-1} = a^2\,.$$

Denna ekvation har en och blott en rot $\geqq 0$. För $n=2$ inses detta omedelbart. För $n>2$ växer vänstra ledet stän-

digt från 0 till ∞, när u växer från 0 till ∞ och antager således värdet a^2 en enda gång för $u \geqq 0$.

Kurvan (25) har alltså samma allmänna förlopp som kurvan (17) (jfr fig.), och ekv. (24) har således en enda positiv rot. Men x satisfierar även denna ekvation, ty enl. (18) är

$$x^{n-1} = b + \frac{a}{\sqrt[n-1]{b + \frac{a}{x}}},$$

(27) . . . . $\quad \because x = u = v = \lim_{\nu = \infty} x_\nu$.

De båda approximationsmetoderna (9) och (19) leda sålunda alltid till målet, som är uppsökandet av den positiva roten till ekv. (7).

Vid användandet av den första metoden startade vi med begynnelsevärdet $x = 0$, och de följande approximationerna blevo ständigt växande. Detsamma hade blivit fallet, om vi hade startat med ett godtyckligt positivt begynnelsevärde $x_0 <$ den sökta roten x och satt

$$x_1 = \sqrt[n]{a + bx_0} \text{ etc.}$$

Om åter x_0 hade varit $> x$, så hade de successiva approximationerna blivit ständigt avtagande.

När vi åter använde den andra metoden, startade vi med begynnelsevärdet $x = \infty$, och de följande approximationerna blevo alternativt mindre eller större än den sökta roten x, som man sålunda närmade sig från båda sidor. Hade vi startat med ett annat godtyckligt positivt begynnelsevärde x_0 och satt

$$x_1 = \sqrt[n-1]{b + \frac{a}{x_0}} \text{ etc.},$$

så hade resultatet blivit detsamma.

Ty om i förra fallet x_0 är $< u$, så är i kurvan (17) y negativt (se fig.),

$$\because x_0^n < a + bx_0 = x_1^n,$$

$\because x_1 > x_0$. Av formlerna $x_1 = \sqrt[n]{a + bx_0}$, $x_2 = \sqrt[n]{a + bx_1}$ etc. följer sedan, att $x_2 > x_1$ etc. Är åter $x_0 > u$, så blir y positivt,

$$\because x_0^n > a + bx_0 = x_1^n,$$

$\because x_1 < x_0$, och på samma sätt finner man då, att x_2 är $< x_1$ etc.

Påståendena i senare fallet vila därpå, att x_2 är $<$ eller $> x_0$, allteftersom x_0 är $>$ eller $< x$, vilket bevisas på analogt sätt med hänvisning till kurvan (25).

Anomalier vid Ohms lag och dess motsvarighet inom magnetismen.

Av OTTO GALLANDER.

Om man ökar spänningen mellan ändpunkterna av en koppartråd, är, som bekant, strömstyrkan i tråden ej proportionell mot spänningen mellan trådens ändpunkter. Detta uppfattas dock ej som någon avvikelse från Ohms lag, utan fenomenet tolkas så, att man säger, att specifika motståndet hos tråden ökas, då trådens temperatur stiger. Om man åter avkyler en ring av bly till så låg temperatur, att en ström, som genom induktion uppväckes i den, fortgår under timmar, sedan den elektromotoriska kraften upphört, tolkas detta fenomen olika; somliga säga, att Ohms lag ej gäller för detta fall, andra att trådens motstånd i närheten av absoluta nollpunkten är försvinnande litet.

Tänker man sig den elektriska strömmen vid metallisk ledning vara en ström av fria elektroner inom ledaren, måste man uppfatta orsaken till motståndet vara elektronernas »stötar» mot molekylerna inom ledaren. Ju mindre molekylernas rörelse är, ju lättare utbildas naturligtvis banor för de fria elektronerna. Bliva molekylerna stilla, kunna de fria elektronerna obehindrat komma fram i dylika banor. Detta betraktelsesätt kräver, att man tolkar senast anförda fenomen så, att man säger, att trådens motstånd vid närheten av absoluta nollpunkten är försvinnande litet.

Enligt Joules lag får man, att ingen energi utvecklas i ledaren av den elektriska strömmen vid absoluta noll-

punkten, och detta är naturligtvis just skälet till att strömmen kan fortgå, utan att det finnes någon elektromotorisk kraft. Genom att i ringen införa ett lämpligt magnetiskt flöde kan man medelst arbete upphäva strömmen i den kalla ringen.

Om man gör sig en ledare genom att sammanlöda koppar- och konstantantrådar samt avfilar vartannat lödställe, så att den sammansatta tråden i dessa får väsentligt mindre genomskärningsarea än i de andra, blir vid strömgenomgång temperaturstegringen i de förra lödställena större än i dem med relativt stor genomskärning enligt Joules lag. De termoelektromotoriska krafterna i de förra bli därför större än i de senare, och i tråden som ett helt uppstå således elektromotoriska krafter, som befordra eller motverka den genomskickade strömmen beroende på strömriktningen. Tråden kommer således att utöva ventilverkan. Den som ej tar hänsyn till dessa termoelektromotoriska krafter inom tråden, skulle säga, att han har en tråd, för vilken Ohms lag ej gäller, emedan dess spec. ledningsförmåga beror på strömtätheten och strömmens riktning. Det skulle ej vara svårt att så avpassa strömstyrkan, att motståndet hos den sammansatta tråden för denna strömstyrka skenbart vore noll eller negativ. För en annan strömstyrka skulle det under i övrigt lika förhållanden givetvis ej förefalla att vara noll.

De i radiotekniken som detektorer använda kristallerna funktionera på samma sätt som vår kopparkonstantantråd, och mången skulle måhända vara frestad att säga, att för dessa kristaller Ohms lag ej gäller. Tar man åter vederbörlig hänsyn till termoelektromotoriska krafter och temperaturkoefficienter, får man Ohms lag att gälla i alla nämnda fall.

Vid studiet av elektricitetens gång genom gaser (mycket förtunnade) stöter man på det fenomen, som kallas »mättningsström». Detta innebär ett verkligt undantag från Ohms lag. Man kan svårligen vinna något på att föreställa sig en motståndsförändring i en oerhört förtunnad gas vid

ökad spänning. Därför förklaras fenomenet alltid genom att man säger: alla elektroner, som bliva fria vid katoden, sugas till anoden.

De magnetiska fenomenen kunna som bekant behandlas från samma synpunkt som den elektriska strömmen. Or saken till en magnetisk verkan kallar man då magnetomotorisk kraft. Samma magnetomotoriska kraft ger emellertid ej alltid samma magnetiska verkan, samma »magnetiska flöde». För man in järn i fältet, förstärkes som bekant flödet mer i den mån flödet får gå i järn, det blir starkare ju kortare dess väg är och ju större genomskärningen för dess bana göres. Vi ha motsvarighet — ej blott kvalitativ utan även kvantitativ — mellan de elektriska och magnetiska fenomenen. Herrar teknici ha tillgodogjort sig detta och kalla lagen »Ohms lag för magnetism». De satser de inhämtat i elektricitetsläran tillämpa de på den magnetiska kretsen och komma så till sina praktiskt betydelsefulla resultat vid konstruktioner av elektriska maskiner och apparater.

En liten dylik tillämpning må belysa detta. Som bekant justeras ett vridspoleinstrument medelst en magnetisk shunt. Denna utgöres av en avlång järnplatta uppsatt över de permanenta magneternas polskor och vridbar, så att dess ändar komma att mer eller mindre täcka polskorna. Huvudflödet från dess permanenta magnet går genom det luftgap, i vilket spolen kan röra sig, och detta flöde blir starkt tack vare det inom spolen anbragta järnstycke, som gör att flödet nästan hela kretsen får gå i järn och således röna litet motstånd. Gör nålen på ett dylikt instrument för stort utslag, vrides den magnetiska shunten, så att den bättre täcker polskorna. Därigenom minskas dess magnetiska motstånd, ty luftgapen i shunten minskas. Huvudflödet minskas då, likaväl som den elektriska strömmen från ett element med avsevärt motstånd försvagas i en ledning, då parallellt med den kopplas en annan ledning.

Den på vilken »Ohms lag för magnetism» ej gått i

blodet, skulle aldrig hittat på en dylik anordning, han skulle knappt förstå den.

Emellertid är analogien mellan de elektriska och magnetiska fenomenen blott av formell natur. Den elektriska strömmen är ett dynamiskt fenomen och det magnetiska flödet ett statiskt. Redan denna omständighet medför olikheter, och i det följande få vi anledning framhålla flera.

Järnets ledningsförmåga för det magnetiska flödet, dess permeabilitet, är stor, men anomal: permeabilitetskoefficienten är en funktion av flödestätheten. Järnets ledningsförmåga för det magnetiska flödet påminner om den i det föregående nämnda kopparkonstantantrådens ledningsförmåga för den elektriska strömmen.

Vid järnets ledning av det magnetiska flödet kompliceras fenomenet dessutom av hysteresis verkan.

För att förstå järnets ledning av det magnetiska flödet måste man bilda sig en föreställning om varpå olikheter i permeabilitet bero.

En genomarbetad teori härför, grundad på modern atomteori, finnes mig veterligen ej. Några utgångspunkter för en dylik är det dock lätt att giva.

Se vi till en början på förhållandet vid det ämne, som har enklaste atombyggnad nämligen vätet, skulle vi vänta oss, att dess permeabilitet vore större än tomrummets. En vätgasatom får man tänka sig som en kärna omkretsad av en elektrisk ström. En sådan bör i ett magnetiskt fält ställa in sig så, att dess eget magnetfält inom elektronbanan sammanfaller med det påtryckta magnetfältet. Då det främmande fältet tryckes i nämnd riktning genom elektronbanan, måste det förminska elektronens hastighet. Denna hastighetsförminskning kan beräknas och visar sig vara så liten, att ingen hänsyn till den därav resulterande magnetiska verkan behöver tagas i jämförelse med den, som bör följa av de särskilda atomernas orientering i det påtryckta fältet. Utförda permeabilitetsmätningar på väte avse emellertid ej vätgasatomer utan vätgasmolekyler, och om vätgasmolekylens byggnad vet man mycket litet. Ett an-

tagande har framkastats, att en vätgasmolekyls båda atomer skulle ha sina elektroner kretsande i parallella banor men löpande i motsatt led. Härigenom skulle dessa båda atomers fält utåt upphäva varandra, och induktionsverkan av ett påtryckt magnetfält skulle samverka och åstadkomma en minskning av den ena elektronens och en ökning av den andras hastighet, då banorna till molekylens elektronpar ej ligga i fältets riktning. Härigenom skulle ett magnetfält uppstå, som motverkade det påtryckta, och resultatet skulle bliva, att vätgas vore ett diamagnetiskt ämne. Den utomordentligt svaga diamagnetism hos vätgas, som senaste mätningar av dess susceptibilitet konstaterat, kan måhända förklaras på detta sätt, men det torde bliva svårt att enbart på dylikt sätt förklara diamagnetismen hos t. ex. vismut.

I ämnen, vars permeabilitet är större än tomrummets, bör enligt denna uppfattning molekylerna vara så byggda, att deras elektronbanor åstadkomma ett resulterande magnetiskt fält av sådan styrka, att då de orienteras genom ett yttre fält, detta förstärkes trots induktionsverkan i de särskilda elektronbanorna.

I en järnmolekyl måste flertalet elektronbanor gå i plan, som göra liten vinkel med varandra.

Det gamla begreppet koercitivkraft behöver ej modifieras.

Med dessa föreställningar kan man lätt förklara hysteresisfenomenet. Vid magnetisering av järn eller stål får man ett visst värde på permeabiliteten. Att detta värde i allmänhet är så många gånger större än i tomrummet beror på de särskilda molekylernas magnetomotoriska kraft. Detta är en allmänt vedertagen uppfattning. Minskas den yttre magnetomotoriska kraften, minskas även det magnetiska flödet men så, att det blir större, än vad det var för samma magnetomotoriska kraft, då denna växer. Detta beror på koercitivkraften, som gör, att de särskilda atomerna ha en benägenhet att bibehålla den orientering de fått vid magnetiseringen och är ej märkvärdigare än t. ex. becks förmåga att långsamt ge efter för yttre krafter.

Blir den avtagande magnetomotoriska kraften = 0, åter-

står ett flöde, d. v. s. permeabiliteten är oändligt stor. Fysiska betydelsen härav framgår av det ovan sagda och är lika lätt att fatta, som att specifika ledningsmotståndet kan bliva = 0 vid mycket låga temperaturer. Det är visserligen vid första påseendet obehagligt, att vi inom läran om magnetism arbeta med en storhet, som blir oändligt stor i ett ofta förekommande fall. Men om man inför permeabilitetens inverterade värde, får man i stället en storhet, som understundom blir noll, och detta torde ej stöta någon, då fysisk förklaring på dessa fall kan givas.

En jämförelse må ytterligare göras. Om en blyring avkyles, så att dess motstånd blir försvinnande, är det försvinnande litet oberoende av strömstyrkan. Men vid ett järnstycke, i vilket det magnetiska motståndet är noll för ett visst flöde, förblir det ej noll för ett däröver lagrat flöde. En enkel förklaring härtill framgår omedelbart genom jämförelse med den i det föregående nämnda koppar-konstantantråden.

Nyare arbeten inom atomteorien.

Av G. STARCK.

Nedanstående uppsats är icke avsedd att utgöra en fullständig översikt över atomteorien på dess nuvarande ståndpunkt, utan att giva en refererande framställning av några under senare tid utkomna arbeten av särskild betydelse, nämligen av Aston (isotopa grundämnen), Rutherford (atomkärnans spjälkning), Bohr (atomteori) Gerlach (atomstrålar), Herzfeld (en överblick över bestämningar av molekylernas storlek), Fajans o. a. (atomteoriens tillämpning på kemiska problem).

1. En nutida atomviktstabell.

Den tyska atomviktskommissionen, sammansatt av M. Bodenstein, O. Hahn, O. Hönigschmid (ordf.) och J. R. Meyer, som upptagit den internationella kommissionens i och med kriget fallna mantel, har nyligen utgivit sin tredje berättelse, för tiden 1921—juli 1922, och i samband därmed två atomviktstabeller. Dessa, som återgiva atomviktsforskningens ståndpunkt den 1 jan. 1923, utgöra, särskilt tabellen 2, ett verkligt koncentrat av den senare tidens forskningar inom atomteorien och förtjäna även av denna anledning att i sin helhet här upptagas. Kommissionen utgiver, som nämnt, två tabeller, en med »praktiska atomvikter», d. v. s. föreningsvikterna för grundämnena i äldre bemärkelse, en fullständig tabell, upptagande elementen i ordningsföljd efter atomnummer, deras »praktiska atomvikter», isotoper, där sådana äro påvisade, och slutligen atomarternas genom kanalstråleanalys eller på grund av radioaktiva samman-

hang bestämda massor. Beträffande tabell 2 må framhållas att bokstäverna a, b, c o. s. v. efter »atomarternas» eller »renelementens» vikter angiva rikligare eller mindre riklig förekomst, i det a > b > c o. s. v. Kursiv stil angiver radioaktivt grundämne.

Tabell 1. Praktiska atomvikter.

Ag	Silver	107,88	Mo	Molybden	96,0
Al	Aluminium	27,1	N	Kväve	14,008
Ar	Argon	39,88	Na	Natrium	23,00
As	Arsenik	74,96	Nb	Niob	93,5
Au	Guld	197,2	Nd	Neodym	144,3
B	Bor	10,82	Ne	Neon	20,2
Ba	Barium	137,4	Ni	Nickel	58,68
Be	Beryllium	9,02	**O**	**Syre**	**16,000**
Bi	Vismut	209,0	Os	Osmium	190,9
Br	Brom	79,92	P	Fosfor	31,04
C	Kol	12,00	Pb	Bly	207,2
Ca	Kalcium	40,07	Pd	Palladium	106,7
Cd	Kadmium	112,4	Pr	Praseodym	140,9
Ce	Cer	140,2	Pt	Platina	195,2
Cl	Klor	35,46	Ra	Radium	226,0
Co	Kobolt	58,97	Rb	Rubidium	85,5
Cr	Krom	52,0	Rh	Rodium	102,9
Cs	Cäsium	132,8	Ru	Rutenium	101,7
Cu	Koppar	63,57	S	Svavel	32,07
Dy	Dysprosium	162,5	Sb	Antimon	121,8
Em	Emanation	222	Sc	Skandium	45,10
Er	Erbium	167,7	Se	Selen	79,2
Eu	Europium	152,0	Si	Kisel	28,3
F	Fluor	19,00	Sm	Samarium	150,4
Fe	Järn	55,84	Sn	Tenn	118,7
Ga	Gallium	69,9	Sr	Strontium	87,6
Gd	Gadolinium	157,3	Ta	Tantal	181,5
Ge	Germanium	72,5	Tb	Terbium	159,2
H	Väte	1,008	Te	Tellur	127,5
He	Helium	4,00	Th	Torium	232,1
Hg	Kvicksilver	200,6	Ti	Titan	48,1
Ho	Holmium	163,5	Tl	Tallium	204,4
In	Indium	114,8	Tu	Tulium	169,4
Ir	Iridium	193,1	U	Uran	238,2
J	Jod	126,92	V	Vanadin	51,0
K	Kalium	39,10	W	Volfram	184,0
Kr	Krypton	82,9	X	Xenon	130,2
La	Lantan	139,0	Y	Yttrium	88,7
Li	Litium	6,94	Yb	Ytterbium	173,5
Lu	Lutetium	175,0	Zn	Zink	65,37
Mg	Magnesium	24,32	Zr	Zirkon	90,6
Mn	Mangan	54,93			

Tabell 2. Kemiska element och atomarter, ordnade efter atomnummer.

Ordn.-tal	Symbol	Elementets benämning	»Praktisk atomvikt»	Atomartens benämning	Atomsymbol	Atomartens massa
1	H	Väte	1,008	Väte	H	1,008
2	He	Helium	4,00	Helium	He	4,0
3	Li	Litium	6,94	$Litium_6$	—	6,0 b
				$Litium_7$	—	7,0 a
4	Be	Beryllium	9,02	Beryllium	Be	9,0
5	B	Bor	10,82	Bor_{10}	—	10,0 b
				Bor_{11}	—	11,0 a
6	C	Kol	12,00	Kol	C	12,0
7	N	Kväve	14,008	Kväve	N	14,0
8	O	Syre	16,000	Syre	O	16,000
9	F	Fluor	19,00	Fluor	F	19,0
10	Ne	Neon	20,2	$Neon_{20}$	—	20 a
				$Neon_{21}$?	—	21 ?
				$Neon_{22}$	—	22 b
11	Na	Natrium	23,00	Natrium	Na	23
12	Mg	Magnesium	24,32	$Magnesium_{24}$	—	24 a
				$Magnesium_{25}$	—	25 b
				$Magnesium_{26}$	—	26 c
13	Al	Aluminium	27,1	Aluminium	Al	27
14	Si	Kisel	28,3	$Kisel_{28}$	—	28,0 a
				$Kisel_{29}$	—	29,0 b
				$Kisel_{30}$?	—	30,0 ?
15	P	Fosfor	31,04	Fosfor	P	31,0
16	S	Svavel	32,07	Svavel	S′	32,0
17	Cl	Klor	35,46	$Klor_{35}$	—	35,0 a
				$Klor_{37}$	—	37,0 b
18	Ar	Argon	39,88	$Argon_{36}$	—	36,0 b
				$Argon_{40}$	—	40,0 a
19	K	*Kalium*	39,10	$Kalium_{39}$	—	39 a
				$Kalium_{41}$	—	41 b
20	Ca	Kalcium	40,07	$Kalcium_{40}$	—	40 a
				$Kalcium_{44}$	—	44 b
21	Sc	Skandium	45,10			
22	Ti	Titan	48,1			
23	V	Vanadin	51,0			
24	Cr	Krom	52,0			
25	Mn	Mangan	54,96			
26	Fe	Järn	55,84			
27	Co	Kobolt	58,97			
28	Ni	Nickel	58,68	$Nickel_{58}$	—	58 a
				$Nickel_{60}$	—	60 b
29	Cu	Koppar	63,57			
30	Zn	Zink	65,37	$Zink_{64}$	—	64 a
				$Zink_{66}$	—	66 b
				$Zink_{68}$	—	68 c
				$Zink_{70}$	—	70 d

Ordn.-tal	Symbol	Elementets benämning	»Praktisk atomvikt»	Atomartens benämning	Atomsymbol	Atomartens massa
31	Ga	Gallium	69,9			
32	Ge	Germanium	72,5			
33	As	Arsenik	74,96	Arsenik	As	75,0
34	Se	Selen	79,2	$Selen_{74}$	—	74 f
				$Selen_{76}$	—	76 c
				$Selen_{77}$	—	77 e
				$Selen_{78}$	—	78 b
				$Selen_{80}$	—	80 a
				$Selen_{82}$	—	82 d
35	Br	Brom	79,92	$Brom_{79}$	—	79,0 a
				$Brom_{81}$	—	81,0 b
36	Kr	Krypton	82,9	$Krypton_{78}$	—	78,0 f
				$Krypton_{80}$	—	80,0 e
				$Krypton_{82}$	—	82,0 c
				$Krypton_{83}$	—	83,0 d
				$Krypton_{84}$	—	84,0 a
				$Krypton_{86}$	—	86,0 b
37	Rb	*Rubidium*	85,5	$Rubidium_{85}$	—	85 a
				$Rubidium_{87}$	—	87 b
38	Sr	Strontium	87,6			
39	Y	Yttrium	88,7			
40	Zr	Zirkon	90,6			
41	Nb	Niob	93,5			
42	Mo	Molybden	96,0			
43	—	—	—			
44	Ru	Rutenium	101,7			
45	Rh	Rodium	102,9			
46	Pd	Palladium	106,7			
47	Ag	Silver	107,88			
48	Cd	Kadmium	112,4			
49	In	Indium	114,8			
50	Sn	Tenn	118,7	$Tenn_{116}$	—	116 c
				$Tenn_{117}$	—	117 f
				$Tenn_{118}$	—	118 b
				$Tenn_{119}$	—	119 e
				$Tenn_{120}$	—	120 a
				$Tenn_{121}$?	—	121 h ?
				$Tenn_{122}$	—	122 g
				$Tenn_{124}$	—	124 d
51	Sb	Antimon	121,8	$Antimon_{121}$	—	121 a
				$Antimon_{123}$	—	123 b
52	Te	Tellur	127,5			
53	J	Jod	126,92	Jod	J	127
54	X	Xenon	130,2	$Xenon_{124}$	—	124
				$Xenon_{126}$	—	126
				$Xenon_{128}$	—	128
				$Xenon_{129}$	—	129 a
				$Xenon_{130}$	—	130
				$Xenon_{131}$	—	131 c

Ordn.-tal	Symbol	Elementets benämning	»Praktisk atomvikt»	Atomartens benämning	Atomsymbol	Atomartens massa
				$Xenon_{132}$	—	132 b
				$Xenon_{134}$	—	134 d
				$Xenon_{136}$	—	136 e
55	Cs	Cäsium	132,8	Cäsium	Cs	133
56	Ba	Barium	137,4			
57	La	Lantan	139,0			
58	Ce	Cer	140,2			
59	Pr	Praseodym	140,9			
60	Nd	Neodym	144,3			
61	—	—	—			
62	Sm	Samarium	150,4			
63	Eu	Europium	152,0			
64	Gd	Gadolinium	157,3			
65	Tb	Terbium	159,2			
66	Dy	Dysprosium	162,5			
67	Ho	Holmium	163,5			
68	Er	Erbium	167,7			
69	Tu	Tulium	169,4			
70	Yb	Ytterbium	173,5			
71	Lu	Lutetium	175,0			
72	Hf	Hafnium				
73	Ta	Tantal	181,5			
74	W	Volfram	184,0			
75	—	—	—			
76	Os	Osmium	190,9			
77	Ir	Iridium	193,1			
78	Pt	Platina	195,2			
79	Au	Guld	197,2			
80	Hg	Kvicksilver	200,6	$Kvicksilver_{107-200}$	—	197—200
				$Kvicksilver_{202}$	—	202
				$Kvicksilver_{204}$	—	204
81	Tl	Tallium	204,4			
				Aktinium C''	Ac C''	(*206*)
				Torium C''	Th C''	*208*
				Radium C''	Ra C''	*210*
82	Pb	Bly	207,2			
				Radium G (Uranbly)	Ra G	206
				Aktinium D	Ac D	(*206*)
				Torium D (Torbly)	Th D	208
				Radium D	Ra D	*210*
				Aktinium B	Ac B	(*210*)
				Torium B	Th B	*212*
				Radium B	Ra B	*214*
83	Bi	Vismut	209,0			
				Radium E	Ra E	*210*
				Aktinium C	Ac C	(*210*)
				Torium C	Th C	*212*
				Radium C	Ra C	*214*

Ordn.-tal	Symbol	Elementets benämning	»Praktisk atomvikt»	Atomartens benämning	Atomsymbol	Atomartens massa
84	Po	*Polonium*	210			
				Polonium		
				(*Radium F*)	Po (Ra F)	*210*
				Aktinium C'	Ac C'	(*210*)
				Torium C'	Th C'	*212*
				Radium C'	Ra C'	*214*
				Aktinium A	Ac A	(*214*)
				Torium A	Th A	*216*
				Radium A	Ra A	*218*
85	—	—	—			
86	Em	*Emanation*	222			
				Aktiniumemanation	Ac Em	(*218*)
				Torium »	Th Em	*220*
				Radium »	Ra Em	*222*
87	—	—	—			
88	Ra	*Radium*	226,0			
				Aktinium X	Ac X	(*222*)
				Torium X	Th X	*224*
				Radium	Ra	226,0
				Mesotorium 1	Ms Th_1	*228*
89	Ac	*Aktinium*	(226)			
				Aktinium	Ac	(*226*)
				Mesotorium 2	Ms Th_2	*228*
90	Th	*Torium*	232,1			
				Radioaktinium	Rd Ac	(*226*)
				Radiotorium	Rd Th	*228*
				Ionium	Io	*230*
				Uran Y	U Y	(*230*)
				Uran X_1	U X_1	*234*
91	Pa	*Protaktinium*	(230)			
				Protaktinium	Pa	(*230*)
				Uran X_2	U X_2	*234*
				Uran Z	U Z	*234*
92	U	*Uran*	238,2			
				Uran II	U II	*234*
				Uran I	U I	*238*

I de praktiska atomvikterna hava endast helt få förändringar vidtagits. Anmärkningsvärd är sänkningen av atomvikten för bor från 10,90 till 10,82. Aston hade funnit ett mass-spektrum för bor, angivande 2 isotoper med massorna 10 och 11, men också, att atomvikten 10,9 föreföll något för hög för att stämma med den relativa intensiteten av de båda linjerna. Hönigschmid företog då en revision av borens atomvikt med det i tabellen upptagna resultatet,

en särdeles vacker illustration till exaktheten av Astons mätningar. Möjligen har man i mass-spektrografien en ny metod för bestämning även av praktiska atomvikter. Även höjandet av antimons atomvikt från 120,2 med icke mindre än 1,6 enheter bestyrkes av Astons bestämning av dess isotoper.

Tab. 2 tar hänsyn till såväl Astons och de på samma område verksamma forskarnas nyare undersökningar, som till framstegen på radioaktivitetens område. Bland de förra är särskilt bestämningen av tennets isotoper anmärkningsvärd, emedan för detta element regeln, att isotopernas massor utgöra hela tal, icke synes gälla. Differenserna mellan tennisotopernas massor äro hela tal, men massorna skilja sig enligt Aston med 0,2 till 0,3 enheter från de hela talen. De av kommissionen anförda värdena böra således läsas med denna reservation.

Genom Astons senaste undersökningar är nu förekomsten av olika atomarter med samma massa även utanför de radioaktiva grundämnenas område fastställd. Sådana »isobara», inaktiva atomarter äro

Ar_{40}	Se_{78}	Se_{80}	Se_{82}	Sn_{124}	Sn_{121}?
Ca_{40}	Kr_{78}	Kr_{80}	Kr_{82}	X_{124}	Sb_{121}

Slutligen har Aston i ett brev till Nature i aug. d. å. redogjort för sina undersökningar över koppar. Han vänder sig där mot Dempster, som i juli angav sig hava funnit 3 isotoper, 62, 64 och 66. A. anmärker härtill, att för element med udda atomnummer (Cu = 29) två empiriska regler visat sig gälla: 1) att intet av dem består av mer än 2 isotoper, 2) att den komponent, som överväger, eller ock båda ha udda atomvikt. Från den första regeln finnes intet undantag, från den andra avviker kväve ensamt. Undersökningen av kopparklorid i mass-spektrografen gav två svaga, men otvetydiga linjer vid 63 och 65, med järnlinjen 56 som jämförelselinje. Intensitetsproportionen var 2,5 : 1, motsvarande en blandningsatomvikt av 63,57, vilket just är koppars praktiska atomvikt. Heltalsregeln gäller i detta fall.

Den kanske märkligaste förändringen i tabell 2 är upptagandet av Hafnium på den förut tomma platsen 72. Härmed har Costers och v. Hevesys upptäckt fått sin officiella bekräftelse. Redogörelsen för denna upptäckt skall lämnas i samband med Bohrs teori.

2. Atomkärnans konstitution.

I denna årgångs andra häfte (dec. 1923) har doc. Ramstedt redogjort för Rutherfords arbeten över atomkärnans sprängning vid bestrålning med α-partiklar från RaC. Samma problem har vid Radiuminstitutet i Wien från år 1922 bearbetats av en svensk forskare, doc. H. Pettersson, som vid sin sida haft en del österrikiska medhjälpare. Dessa undersökningar äro utförda med en mycket stor experimentell skicklighet och synas i metodiskt hänseende överlägsna Rutherfords; de hava också lett till i viss mån avvikande resultat.

Den atomsprängningsapparat, varmed de flesta försöken utfördes, är avbildad i fig. 1. En smal springa i ett mässingsbleck, 2 mm bred och djup, 45 mm lång, försågs med en botten av $^1/_{100}$ mm tjockt kopparbleck. Det sålunda bildade rummet var genom tre tvärväggar, som icke fullt nådde upp till överkanten, delat i fyra lika stora avdelningar. I tre av dessa avdelningar utbreddes i tunna skikt de ämnen, som skulle undersökas, och tre olika substanser kunde således samtidigt prövas. Den fjärde avdelningen förblev tom för kontrollförsök. Ett pålött mässingsbleck bildade ett tättslutande lock på tråget. Dettas ena ände utmynnade i ett vertikalt rör, vari ett tunnväggigt, med torr radiumemanation fyllt glasrör befann sig under en kvicksilvertätad stämpel. Då denna nedpressades, krossades glasröret och emanationen drevs in i tråget. Omedelbart därefter hoplöddes ett

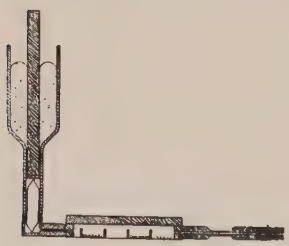


Fig. 1. Atomsprängningsapparat, vertikalsnitt.

i den andra änden fästat avloppsrör av tenn, genom vilken luften fått utlopp.

Avsikten med denna anordning var att erhålla en kraftigare strålningskälla än den Rutherford begagnat och samtidigt en mera långlivad. Det enda strålningspreparat, som är användbart vid dessa försök är RaC, och Rutherford hade framställt ett belägg därav genom att någon tid utsätta ett metallbleck för emanationens inverkan. Men RaC har en kort halveringstid av endast 20 min., som omöjliggör långvariga försök. Emanationen återigen har en halveringstid av nära 4 dagar och kan således i den här beskrivna anordningen hålla RaC-mängden konstant under en i jämförelse därmed mycket lång tid. De α-partiklar, som utsändas av emanationen själv och av RaA hava icke någon inverkan på förloppet.

De genom apparatens botten utträngande vätepartiklarna undersöktes enligt simtillationsmetoden. För detta ändamål anbraktes apparaten i ett magnetfält, som avböjde β-strålar. Under den placerades en zinksulfidskärm, och ljusblixtarna räknades med användning av ett ljusstarkt mikroskop.

Enligt de resultat, som förlågo sommaren 1923, skulle litium, beryllium, magnesium och kisel avgiva vätepartiklar vid bestrålning med α-partiklar. Räckvidderna voro resp. 10, 18, 13 och 12 cm luft. Alla dessa ämnen voro av Rutherford undersökta med negativt resultat. Nedanstående tabell sammanfattar alla dittills erhållna resultat.

Element	Atomnummer	Atomvikt	Räckvidd
Litium	3	7	10 cm
Beryllium	4	9	18 »
Bor	5	10, 11	58 »
Kväve	7	14	40 »
Fluor	9	19	65 »
Natrium	11	23	58 »
Magnesium	12	24, 25, 26	13 »
Aluminium	13	27	90 »
Kisel	14	28	12 »
Fosfor	15	31	65 »

Rutherford hade sammanfattat sina resultat i tre regler:

1. Aktiva element hava udda ordningstal i regelbunden följd, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

2. Atommassan för dem återgives av formeln $4n+a$, där n är ett helt tal och $a=3$, utom för kväve, där $a=2$.

3. Med undantag av bor, som har två isotoper, äro de aktiva elementen alla renelement.

Dessa regler synas icke längre giltiga, om bland de aktiva elementen ingå Be, Mg och Si med jämna ordningstal, och bestående av ända till 3 isotoper. Regeln n:r 2 utsäger, att atomkärnor för att kunna sprängas måste vara byggda av heliumkärnor och 2 eller 3 vätekärnor. Men för Be, Mg och Si är kärnmassan av formen $4n+1$ resp. $4n$, varvid är att observera att i Mg isotopen 24, i Si isotopen 28 är den dominerande. Det är således icke uteslutet, att vätekärnor kunna utsprängas ur atomer, som äro uppbyggda endast av heliumkärnor.

För att förklara kärnans sönderspräng ning, antager Rutherford, att åtminstone en av de kärnan uppbyggande väte-partiklarna omkretsar kärnan enligt fig. 2. Om denna satellit direkt träffas av en α-partikel, lösgöres den från kärnan, antingen framåt (A) eller bakåt (B). Pettersson anser fenomenet böra förklaras som en explosion av kärnan, åstadkommen genom att α-partikeln vid en kärnträff överför till atomkärnan den energimängd som är nödvändig för att kärnstrukturen skall bliva instabil och på grund av repulsionskrafter inom kärnan ett atomfragment, en väte- eller heliumpartikel utslungas. De utvecklade möjligheter för ett genomforskande av atomsprängningens förlopp, som den av Pettersson använda metoden synes utlova, ställa i utsikt även ett val mellan dessa båda förklaringssätt.

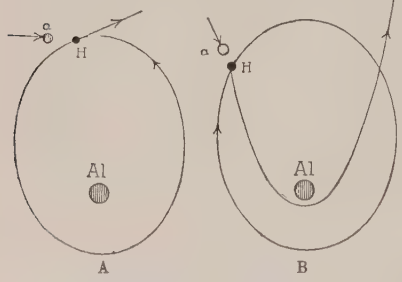


Fig. 1. Atomsprängning enligt Rutherford. A: framåtriktade, B: bakåtriktade H-partiklar.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

H. Schjelderup. *Relativitetsteoriens verdensbillede.*

Till Red. har insänts detta lilla häfte, tillhörande »Det Norske Studentersamfunds Folkeskrifter». Den åtföljes av ett litet uttalande av den engelska tidskriften »The Bookman» om att den skulle vara den första läsbara framställningen av Einsteins teori. I själva verket innehåller den just desamma framställningar och mer eller mindre haltande liknelser som man är van att finna i tidningar och tidskrifter angående denna sak. För övrigt är den full av beundrande utrop över det snillrika i teorin, men något svar på de inkast, som varje tänkande läsare måste göra vid en sådan framställning, söker man fåfängt. Såsom populär framställning förefaller den oss därför i hög grad underlägsen t. ex. prof. Benedicks' verkligen kritiska framställning, som han gjorde inför Stockholms Högskolas studenter, och som även föreligger i tryck. *M—r.*

—

Almanacksreform.

Åter har den gamla frågan om reformering av vår högst irrationella kalender blivit aktuell, denna gång genom initiativ av Nationernas förbund, vilket väl även är den rätta institutionen för ett dylikt.

Granskar man förslaget, så finner man, att det innehåller följande huvudpunkter:

1) De rörliga högtiderna sättas fast på lämpliga dagar.

2) Nyårsdagen flyttas till det verkliga vintersolståndet.

3) Månadernas längd ändras, så att varje *kvartal* får lika längd.

För att ernå det sistnämnda måste emellertid veckodagsserien brytas, så att de 52 veckorna (= 364 dagar) bilda det egentliga året, och 1 resp. 2 skottdagar inskjutas utan att tillhöra någon vecka eller månad.

Vad den första punkten beträffar, så har den ju länge utgjort ett önskemål, och skulle kunna nås utan någon mer genomgripande reform.

Vad åter de övriga punkterna angår, så torde väl fördelarna vara ganska tvivelaktiga: vem kan egentligen hava någon glädje av att nyårsdagen infaller vid vintersolståndet? Och vem har någonsin haft någon olägenhet av att *kvartalen* innehållit något olika antal dagar? Ränteberäkning sker, som bekant, aldrig per kvartal, och vid erläggande av hyror o. dyl. torde man ej med bästa vilja kunna framkonstruera några olägenheter av detta förhållande, men väl av att kvartalsdagen kan infalla på en söndag.

Och för dessa imaginära fördelar skulle en så genomgripande förändring företagas! Den *verkliga* olägenheten med vår kalender, att *månaderna* äro olika långa, och *att samma veckodag ej infaller på samma datum* skulle dock kvarstå. Det hela skulle därför blott leda till stora svårigheter vid övergången, utan att medföra någon egentlig nytta.

Nej, om en sådan stor förändring bör göras med någon verklig fördel, så torde det bliva nödvändigt att göra den ändå radikalare genom att *införa 13 månader à 28 dagar.* Även då måste man naturligen införa 1 (resp. 2) skottdagar, som ej tillhörde månads- eller veckodagsserien; men då skulle man även vinna den stora fördelen, att samma datum alltid inföll på samma veckodag. Man behövde då t. ex. aldrig skriva måndagen den 8:e, ty den 8:e i vilken månad som helst, vore alltid en måndag, en månad vore alltid 4 veckor o. s. v. *M—r.*

Några ord till svar angående trefasgenerator- och motormodeller.

I marsnumret av denna tidskrift har lektor E. Zachrisson framlagt en del kritik med anledning av undertecknads beskrivning över modeller till trefasgenerator och -motor. Till denna vill jag för min del endast svara, att det aldrig varit min avsikt att med dessa modeller giva annat än ett anspråkslöst försök att göra det av Moll använda framställningssättet av trefasströmmarnas och vridfältets uppkomst en smula mera konkret än vad som kan ske genom en vanlig plansch.

Huruvida det av Moll använda framställningssättet är så olämpligt som lektor Zachrisson anser, synes mig snarast vara en metodisk fråga. Varje framställning på ett relativt elementärt stadium av en något så när komplicerad apparat måste ju alltid bliva en schematisering av de verkliga förhållandena. Var den gräns går, som denna schematisering ej får överskrida, det kommer nog i många fall alltid att förbli en tvistefråga, i synnerhet mellan representanter för till sin läggning så olika läroanstalter som en teknisk fackskola och ett gymnasium.

John Lundberg

Matematiska uppgifter.

163. Diskutera och upprita kurvorna

a) $y = \pm\sqrt{\sin x} \pm \sqrt{1 - \sin x}$,

b) $y = \pm\sqrt{\sin x} \pm \sqrt{1 + \sin x}$. (*M—r.*)

164. På huru många nollor slutar talet 5^n? (*G. L—g.*)

165. I triangeln ABC är $\beta = 2\alpha$. O är den inskrivna cirkelns medelpunkt. Sök förhållandet mellan avståndet från B till CO och sträckan AO. (*X.*)

166. Att med passare, men utan linjal, dela en given cirkelperiferi i fyra lika delar. (*X.*)

167. Ekvationen

$$x^4-(43+2i)x^3+(512+83i)x^2-(1213+902i)x+391+\\+1173i=0$$

har två reella rötter. Lös ekvationen.

168. En kanon utskjuter en kula med begynnelsehastigheten v. I två olika riktningar, som med horisonten bilda vinklarna α och β, träffas en viss punkt A. Beräkna härav punkten A:s höjd över marken samt dess horisontella avstånd från kanonen. Luftmotståndet försummas.

Lösningar till uppg. i häft. 2. 1923—24.

151. *Om c är ett helt tal >1, så kan $4c^3-1$ icke vara 3 gånger kvadraten på ett helt tal.*

Betecknar m ett helt tal, så skall man bevisa orimligheten av ekvationen

$$4c^3-1=3m^2.$$

m kan här ej vara ett jämnt tal, emedan $4c^3-1$ är udda. Sätt då $m=2n+1$. Då vore

$$4c^3-1=3(2n+1)^2=12n^2+12n+3 \quad \text{eller} \quad c^3=3n^2+3n+1.$$

Tillägges n^3 på båda sidor, så skulle man få

$$c^3+n^3=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3,$$

vilket är orimligt (om ej $n=0$, $c=1$) enligt Fermats sats, vilken för kuberna är bevisad av Euler och Legendre.

(Utförliga lösningar, som dock ej kunna intagas, insända av X och *Iter.*)

152. *Bestäm i kurvan $y=3ax^2-x^3+a^2$ värdet på a så, att ytan av den triangel, som begränsas av koordinataxlarna och kurvans tangent i dess inflexionspunkt, blir så stor som möjligt.*

Låt tangenten i fråga vara $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$. Då skall ekvationen

$$q-\frac{q}{p}x=3ax^2-x^3+a^2$$

hava en tredubbel rot, således polynomet

$$x^3 - 3ax^2 - \frac{q}{p}x + q - a^2$$

vara en jämn kub, således tydligen =

$$= (x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 .$$

Härav således

$$-\frac{q}{p} = 3a^2 , \qquad q - a^2 = -a^3$$

eller

$$q = a^2(1 - a), \; p = \frac{a - 1}{3} .$$

Triangelytan blir således $= +\frac{pq}{2} = \frac{a^2(1-a)^2}{6}$, vilket har sitt maximum $= \frac{1}{96}$ för $a = {}^1/_2$. (X.)

Annan lösning.

Man finner

$$y' = 6ax - 3x^2 ,$$
$$y'' = 6a - 6x = 6(a - x).$$

Kurvan har således en inflexionspunkt[1] i

$$\begin{cases} x = a , \\ y = a^2(1 + 2a). \end{cases}$$

Inflexionstangentens ekvation är

$$y - a^2(1 + 2a) = 3a^2(x - a)$$

eller

$$y = 3a^2x + a^2(1 - a). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Tangentens axeltracer äro $x = -\frac{1}{3}(1 - a)$, $y = 0$ och $x = 0$, $y = a^2(1 - a)$. Den mellan koordinataxlarna och inflexionstangenten inneslutna ytan är således

$$T = \frac{1}{6}a^2(1 - a)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

[1] Den tredje derivatan behöver naturligtvis i detta fall icke undersökas, enär den uppenbarligen är en konstant $\neq 0$.

Sättes då $u = |a(1-a)|$,

så är, för $a > 1$ och för $a < 0$,

$$u = a(a-1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

däremot, för $1 > a > 0$,

$$u = a(1-a). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

I fallet (α) finnes intet extremum (väl däremot ett undre resp. ett övre gränsvärde, som ger $T_{\min} = 0$). I fallet (β) har u (och således även T) ett *maximivärde* för $a = \frac{1}{2}$. Då emellertid inga a-gränser fixerats, finnes intet hinder att låta a växa obegränsat, varvid enligt (2) även T växer obegränsat. Något värde på a, som gör T *så stor som möjligt*, existerar således icke. (*Iter.*)

153. *Visa att i kurvan* $y = 3a^2x^2 - ax^3$ *avståndet från maximipunkten till tangenten i inflexionspunkten är lika med avståndet från minimipunkten till samma linje.*

Ekvationen kan skrivas

$$y - 2a = -a(x-a)^3 + 3a^3(x-a),$$

varav framgår att kurvan är symmetrisk med avseende på den kurvan tillhörande punkten $(a, 2a^4)$, som eo ipso är inflexionspunkten. Av symmetrien följer vidare, att maximi- och minimipunkterna ligga symmetriskt med avseende på denna, varav satsen.

Anm. 1. Satsen gäller naturligtvis för varje egentlig tredjegradskurva $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = f(x)$, där $A \neq 0$, ty även denna kurva är symmetrisk med avseende på en av sina egna punkter nämligen $x = -\frac{B}{3A}$, $y = f\left(-\frac{B}{3A}\right)$. Maximi- och minimipunkterna äro bägge reella eller bägge imaginära eller sammanfalla med inflexionspunkten.

Anm. 2. För tredjegradskurvor med spets gäller följande välkända sats:

Om en sekant genom inflexionspunkten P skär kurvan ytterligare i A och B samt spetstangenten i Q, ligga P och Q

harmoniskt i förhållande till A och B. Kurvans tangenter i A och B räkas på t. I föreliggande fall är *t* oändlighetslinjen. Omvänt kan denna projektivgeometriska sats anses bevisad genom i föregående anm. påpekade faktum.

(*X* och *Iter.*)

154. *Att upprita en triangel, då man känner de vidskrivna cirklarnas radier.*

Emedan $p-a$, $p-b$ och $p-c$ äro omvänt proportionella mot r_a, r_b och r_c hava vi

$$p-a=\frac{k}{r_a},\quad p-b=\frac{k}{r_b},\quad p-c=\frac{k}{r_c}.$$

Genom addition av de båda sista fås

$$a=\frac{k}{r_b}+\frac{k}{r_c}$$

och på liknande sätt $$b=\frac{k}{r_c}+\frac{k}{r_a}$$

$$c=\frac{k}{r_a}+\frac{k}{r_b}.$$

Om vi således taga en cirkel med diametern AB t. ex. = summan av den största och den minsta av r_a, r_b, r_c (fig. 1), och från deras mötespunkt O inpassar den mellersta såsom OC. (Vi antaga t. ex. $OA=r_a$, $OB=r_b$, $OC=r_c$), och utdrager CO tills den träffar periferin i D, så äro OB, OA och OD proportionella mot $\frac{1}{r_a}$, $\frac{1}{r_b}$ och $\frac{1}{r_c}$. Om vi således göra $a_1=OA+OD$, $b_1=OD+OB$ och $c_1=OB+OA$, så få vi av sidorna a_1, b_1, c_1 en triangel lik-

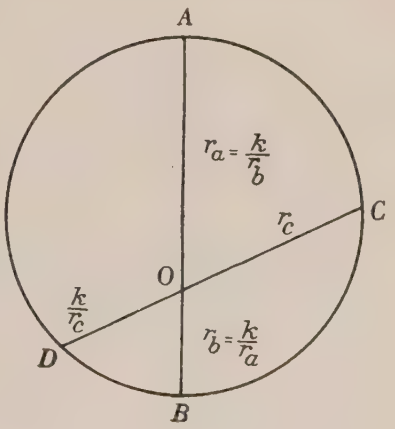


Fig. 1.

formig med den sökta, vars konstruktion sedan lätt fås genom förstoring.

Man får alltid en och blott en triangel, ty genast synes, att den största linjen a_1 är $< b_1 + c_1$.

(Inga lösningar inkomna.)

155. *I en likbent triangel är toppvinkelns bissektris hälften så stor som basvinkelns. Sök vinklarna.*

Kallas benet b och basen $2a$, bissektriserna v och $2v$ samt basvinkeln 2β, så gör den sistnämndas bissektris med motstående ben vinkeln 3β. Då är

$$2T = b \cdot 2v \sin 3\beta = 2av = 2b \cos 2\beta \cdot v .$$

$$\because \sin 3\beta = \cos 2\beta ;\ 3\beta = 90° - 2\beta ;\ \beta = 18°.$$

Vinklarna äro 36°, 36°, 108°.

(Löst av *X* och *Iter.*)

156. *På en rät*[1] *cirkulär cylinder utskäres en kurva genom en sfär, vars medelpunkt ligger på cylinderns yta. Sök ekvationen för denna kurva, då cylindern utvecklas i ett plan.*

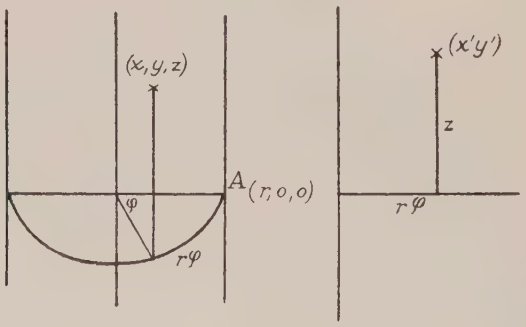


Fig. 2.

Låt i ett rätvinkligt koordinatsystem cylinderns axel vara z-axel och x-axeln lagd genom sfärens medelpunkt. $A\,(r\,,\,0\,,0)$. Sfärens radie a. Kurvans ekvationer äro då

$$\begin{cases} (x-r)^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \quad \text{(fig. 2).}$$

Om till origo för koordinatsystemet i planet tages A, och

[1] Detta ord var uteglömt i texten.

till y-axel den generatris som går genom A, så faller punkten (x, y, z) vid cylinderns utveckling i en punkt (x', y'), varest $y' = z$ och $x' =$ avståndet till A utefter stödcirkeln genom A.

Vi få således

$$y' = z \text{ och } x' = 1\varphi, \text{ då } \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{(x-r)^2+y^2}}{2r} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{2r} = \frac{\sqrt{a^2-y'^2}}{2r}.$$

Vi få således

$$x' = 2r \arcsin\frac{\sqrt{a^2-y'^2}}{2r},$$ eller efter förenkling och accenternas strykning

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2r}}{\frac{a^2}{4r^2}} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

en ekvation som i viss mån påminner om ellipsens.

(Löst av *Iter.*)

Vår prisuppgift för 1923—24.

Tvenne tävlingsskrifter om vår prisuppgift för innevarande år hava inom föreskriven tid insänts till redaktionen: en av eleven vid Maskinfackskolan i Eskilstuna *Erik Nilsson* och en av eleven vid Folkskollärareseminariet i Lund *Hans Lundell.*

Det förstnämnda tävlingsförslaget är vida omsorgsfullare och fullständigare utarbetat än det senare. Båda förslagen kunna läggas till grund för en tillfredsställande behandling av den föreliggande prisuppgiften, men intetdera innebär en fullgod lösning. Redan av denna anledning vill redaktionen ej publicera förslagen, och då en användbar lösning av uppgiften skulle kunna bereda uppfinnaren inkomst,

torde det ligga i de tävlandes intresse att deras idéer ej offentliggöras.

Då uppgiften ej är fullt löst, anser sig redaktionen ej kunna utdela något 1:a pris, men vill tilldela 2:a priset, *K. G. Karlson, Maskinelement* åt

Erik Nilsson,

lärjunge vid Maskinfackskolan i Eskilstuna, och 3:e priset, *Prenumerationskort å Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi, 8:e årgången* åt

Hans Lundell,

lärjunge vid Folkskollärareseminariet i Lund.

Fråga och svar.

Fråga: Inom radiolitteraturen förekommer ett, som jag tror, nytt mått för kapacitet och självinduktion, nämligen centimeter. Då jag har svårt att tro, det samma beteckning kan gälla för såväl längd som kapacitet och självinduktion, förutsätter jag, att den i fråga om de två senare är förkortad. Vore synnerligen tacksam för att genom tidskriften få veta, huruvida centimeter som mått för kapacitet och självinduktion är den fullständiga benämningen och som sådan erkänd, eller vilken den fullständiga är. Har definitionen godkänts på någon kongress?

Svar: För mätning av de storheter, som förekomma inom elektricitetsläran, finnas tre olika system grundade på cgs-systemet.

1. Det elektrostatiska, baserat på Coulombs lag.
2. Det elektromagnetiska, som utgår från den elektriska strömmens verkan på en magnetpol.
3. Det »praktiska» systemet, ursprungligen grundat på det elektromagnetiska systemet, men med praktiskt användbar storhetsordning på enheterna genom multiplikation

eller division av de »absoluta» enheterna med digniteter av 10. Detta system är i många länder det enda lagliga måttsystemet.

Då enheterna i de båda första systemen och således även i den ursprungliga formen av det tredje från formell och matematisk synpunkt äro mycket enkla, men från fysisk synpunkt mycket besvärliga, har 1908 års internationella kongress för måttsystem frångått de teoretiska grunddefinitionerna och baserat definitionen på en ampère på den elektriska strömmens kemiska verkan och på en ohm genom en noga bestämd kvicksilverpelare. Ur dessa definitioner ha med hjälp av fysiska lagar enheter för alla andra förekommande storheter definierats på enklaste sätt. I detta system definieras enheterna för kapacitet — *farad* och *mikrofarad* — samt för självinduktion — *henry* —, så att man ej finner något omedelbart samband mellan någon av dem och enbart längdenheten.

Genom dimensionsläran får man enligt de båda första måttsystemen för alla storheter inom elektricitetsläran enheter, som äro funktioner av centimetern, grammet och sekunden. Så t. ex. skulle elektriskt ledningsmotstånd enligt det elektrostatiska systemet mätas i $^{sek.}/_{cm}$ och enligt det elektromagnetiska i $^{cm}/_{sek.}$. Sådana storheter som elektrisk ström få mycket komplicerade enheter med olika dimensioner i de båda systemen. Dessa olikheter visa, hur godtyckliga utgångspunkterna äro. Då enheten blir komplicerad, faller det ingen in att använda den. Men för självinduktion blir enheten *cm* i det elektromagnetiska systemet. Detta vill ej säga, att man skulle kunna mäta upp en självinduktion endast genom att mäta en längd. Men då henry stundom är en för stor enhet, kallar man en tusenmiljondel av en henry (denna bestämd enligt det praktiska systemet) för en cm, och använder således namnet på en måttenhet för längd på en elektrisk storhet. Ännu sämre ställer det sig för dem som mäta kapaciteter i cm. I det elektrostatiska systemet är kapacitetens dimension en längd, och detta är anledning till att somliga mäta kapaciteter i cm.

Detta är ej blott lika olämpligt som att mäta självinduktioner i cm utan härtill kommer, att man vid övergång till enheter som passa samman med övriga använda enheter får en reduktionsfaktor, som är lika besvärlig som dem man hade före metersystemets tillkomst. En kapacitet på 1 cm är nämligen $1{,}11 \cdot 10^{-6}$ mikroforad.

Att två storheter från olika områden kunna hava samma dimension, och således *kunna* mätas i samma mått, är i sig självt intet orimligt, så t. ex. arbete och statiskt moment, hastighet och ledningsmotstånd o. s. v., men, såsom ovan är sagt, inför man helst olika enheter för desamma, även om dessa enheter skulle hava samma dimension. Se vidare härom denna tidskrift, årg. 1, sidd. 20—21.

O. G—r.